グラフとネットワーク　第 11 回

彩色：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 6 月 25 日

最終更新：2021 年 6 月 14 日　00:08

概要

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- 彩色と染色数
- 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- 貪欲彩色による上界
- 弱双対性の弱さの評価：ミチェルスキの構成法

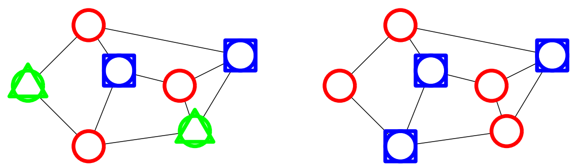
目次

無向グラフの彩色

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：彩色とは？ (直感的な定義)

G の **彩色** (さいしょく) とは，
G の頂点への色の割当で，各辺の両端点の色が異なるもの



彩色である　　　彩色ではない

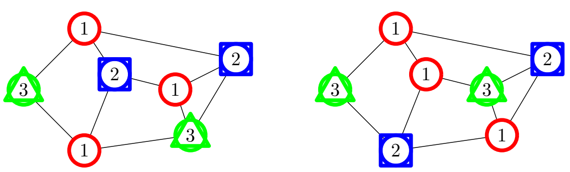
彩色において，同じ色を持つ頂点の集合を **彩色クラス** とも呼ぶ

無向グラフの彩色：形式的な定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色とは？ (形式的な定義)

G の k **彩色** とは，写像 $c\colon V \to \{1, \dots, k\}$ で，
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ を満たすもの



3 彩色である　　　3 彩色ではない

c の終域 $\{1, \dots, k\}$ を **パレット** と呼ぶことがある

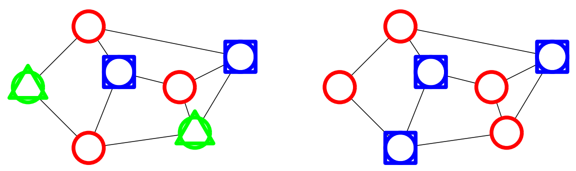
彩色可能性

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色可能性とは？

G が k **彩色可能** であるとは，G の k 彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である



3 彩色である　　　2 彩色は存在しない

注：G が k 彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k+1$ 彩色可能

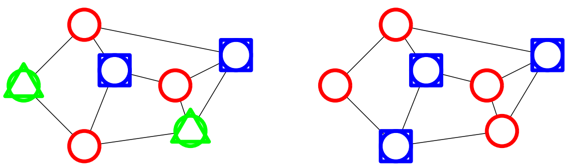
染色数

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：染色数とは？

G の **染色数** とは，G の k 彩色が存在するような最小の k

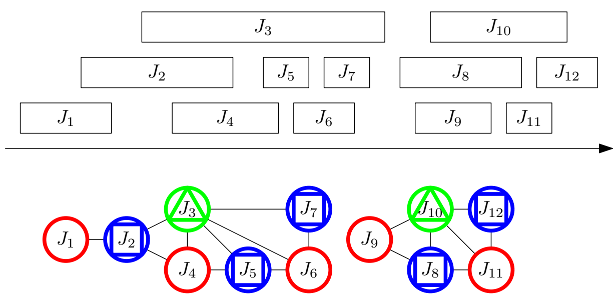
G の染色数を $\chi(G)$ で表す　　　(注：$\chi(G) \leq |V|$)



3 彩色である　　　2 彩色は存在しない

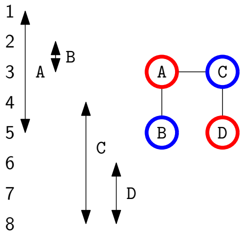
∴ このグラフの染色数は 3

彩色が現れる場面 (1)：ジョブスケジューリング



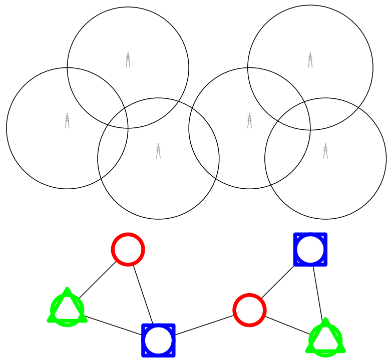
彩色が現れる場面 (2)：レジスタ割当

```
1: A = 2
2: B = 3
3: B = B + 2
4: C = A + 1
5: A = C + 3
6: D = 4
7: D = C + 2
8: C = 3
```




```
1: R1 = 2
2: R2 = 3
3: R2 = R2 + 2
4: R2 = R1 + 1
5: R1 = R2 + 3
6: R1 = 4
7: R1 = R2 + 2
8: R2 = 3
```


彩色が現れる場面 (3)：移動体通信における周波数割当



2 彩色可能性と二部グラフ

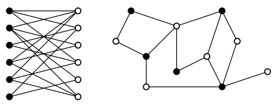
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：2 彩色可能性に対する必要十分条件

G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow$ G は二部グラフ

「$\Rightarrow$」の証明：G は 2 彩色可能であるとする

- G の 2 彩色を 1 つ考え，その彩色クラスを A, B とする
- A の 2 頂点は辺で結ばれず，B の 2 頂点も辺で結ばれない
- $\therefore$ G は A, B を部集合とする二部グラフである



2 彩色可能性と二部グラフ (続)

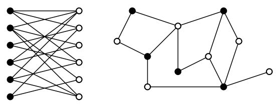
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：2 彩色可能性に対する必要十分条件

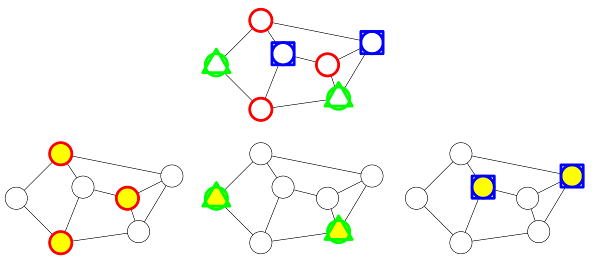
G は 2 彩色可能 $\Leftrightarrow$ G は二部グラフ

「$\Leftarrow$」の証明：G は二部グラフであるとする

- G の部集合を A, B とする
- A の 2 頂点は辺で結ばれず，B の 2 頂点も辺で結ばれない
- $\therefore$ G は A, B を彩色クラスとする 2 彩色を持つ $\square$



彩色クラスと独立集合



彩色の彩色クラスは独立集合

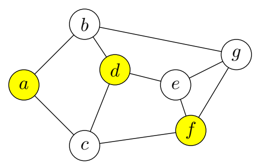
(互いに隣接していない頂点から成る部分集合)

独立集合

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：独立集合とは？

G の **独立集合** とは，頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，
任意の異なる 2 頂点 $u, v \in I$ に対して $\{u, v\} \notin E$



$\{a, d, f\}$ は，このグラフの独立集合である

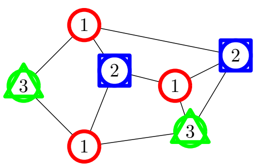
無向グラフの彩色：独立集合を用いた定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

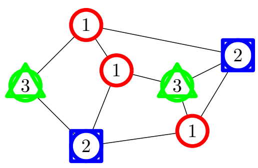
定義：彩色とは？ (独立集合を用いた定義)

G の k **彩色** とは，
k 個の独立集合 $I_1, \ldots, I_k$ への頂点集合 V の分割

- $V = I_1 \cup \cdots \cup I_k$
- 任意の $i \neq j \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$I_i \cap I_j = \emptyset$



3 彩色である



3 彩色ではない

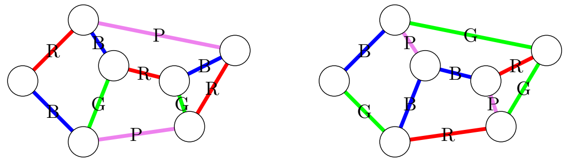
目次

無向グラフの辺彩色

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：辺彩色とは？（直感的な定義）

G の **辺彩色**（へんさいしょく）とは，
G の辺への色の割当で，端点を共有する辺の色が異なるもの



辺彩色である　　　辺彩色ではない

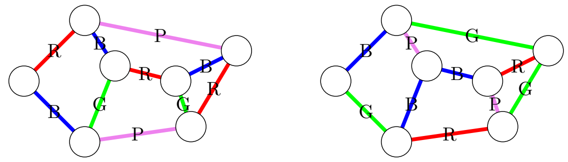
辺彩色において，同じ色を持つ辺の集合を **彩色クラス** とも呼ぶ

無向グラフの辺彩色：形式的な定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：辺彩色とは？（形式的な定義）

G の k **辺彩色** とは，写像 $c \colon E \to \{1, \ldots, k\}$ で，
端点を共有する任意の辺 $e, f \in E$ に対して $c(e) \neq c(f)$ を満たすもの



4 辺彩色である　　　4 辺彩色ではない

c の終域 $\{1, \ldots, k\}$ を **パレット** と呼ぶことがある

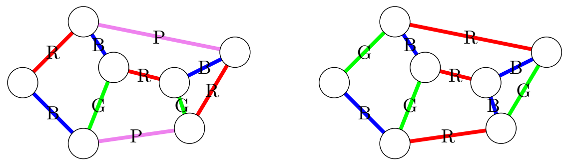
辺彩色可能性

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：辺彩色可能性とは？

G が k **辺彩色可能** であるとは，G の k 辺彩色が存在すること

このグラフは 4 辺彩色可能である



4 辺彩色である　　　3 辺彩色は存在しない

注：G が k 辺彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k+1$ 辺彩色可能

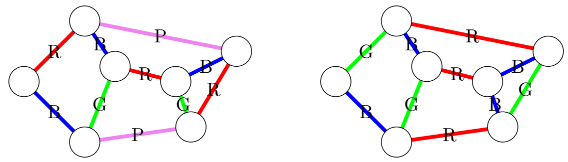
辺染色数

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：辺染色数とは？

G の **辺染色数** とは，G の k 辺彩色が存在するような最小の k

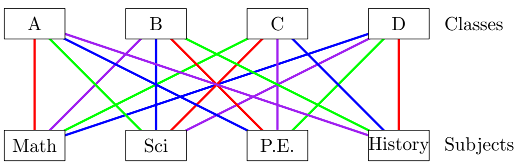
G の辺染色数を $\chi'(G)$ で表す



4 辺彩色である　　　3 辺彩色は存在しない

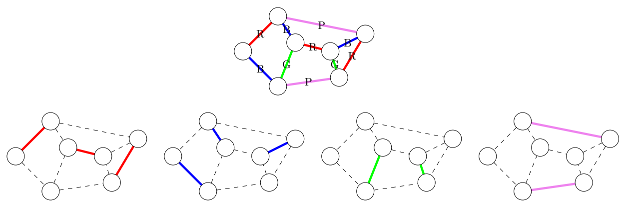
$\therefore$ このグラフの辺染色数は 4

辺彩色が現れる場面：時間割作成



		A	B	C	D
■	1	Math	P.E.	Sci	History
■	2	Sci	History	Math	P.E.
■	3	P.E.	Sci	History	Math
■	4	History	Math	P.E.	Sci

彩色クラスとマッチング



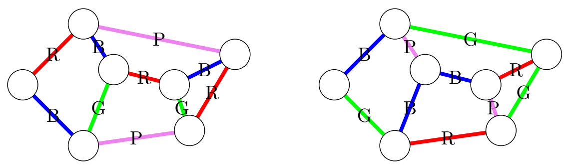
辺彩色の各彩色クラスはマッチング

無向グラフの辺彩色：マッチングを用いた定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：辺彩色とは？（マッチングを用いた定義）

G の k **辺彩色** とは，
k 個のマッチング $M_1, \ldots, M_k$ への辺集合 E の分割



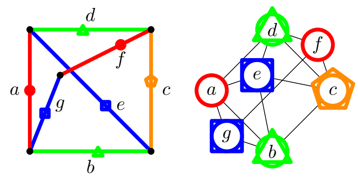
4 辺彩色である　　　4 辺彩色ではない

辺彩色は彩色の特殊な場合

定義：線グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$ の **線グラフ** $L(G)$ とは

- 頂点集合が E であり，
- 辺集合が $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1$ と e_2 が共通端点を持つ $\}$

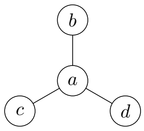


G　　　$L(G)$

G の辺彩色 $\leftrightarrow$ $L(G)$ の彩色　つまり，$\chi'(G) = \chi(L(G))$

すべてのグラフが線グラフであるわけではない

次のグラフは線グラフではない (対応する元のグラフがない)　(演習問題)



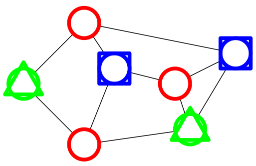
つまり，$K_{1,3} \simeq L(G)$ を満たす無向グラフ G は存在しない

目次

今から行うこと

目標

無向グラフに対して，
- 少ない色数で，彩色を行う
- できれば，染色数を求める



染色数の上界

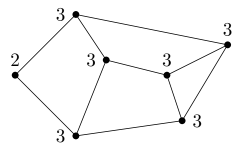
性質：染色数の上界

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

復習：最大次数とは？

無向グラフ G の最大次数 $\Delta(G)$ とは，その頂点の次数の最大値



$\Delta(G) = 3$

証明：頂点数に関する帰納法

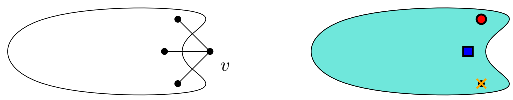
染色数の上界：証明 (1)

証明：$|V| = 1$ のときを考える
- このとき，$\Delta(G) = 0$ である
- 一方で，$\chi(G) \leq |V| = 1 = \Delta(G) + 1$ である
- したがって，$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ が成り立つ

次に，任意の自然数 $k \geq 1$ を考える．
- $|V| = k$ を満たす任意の G に対して $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ が成り立つと仮定する
- このとき，$|V| = k + 1$ を満たす任意の G に対して，$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ を満たすことを証明する

染色数の上界：証明 (2)

証明 (続き)：$G = (V, E)$ において，任意の頂点 $v \in V$ を考える
- $G' = G - v$ とすると，$\Delta(G') \leq \Delta(G)$ である
- G' の頂点数は $|V| - 1 = k$ なので，帰納法の仮定から，$\chi(G') \leq \Delta(G') + 1 \leq \Delta(G) + 1$ となる
- つまり，G' は $\Delta(G) + 1$ 彩色可能である
- $c' \colon V - \{v\} \to \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ を G' の $\Delta(G) + 1$ 彩色とする



G　G'

目標：G の $\Delta(G) + 1$ 彩色 c を c' から構成する

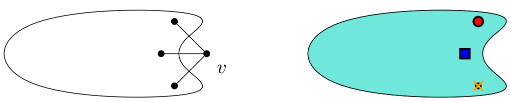
染色数の上界：証明 (3)

証明 (続き)：

観察 A

$\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\} - \{c'(u) \mid u \in N_G(v)\} \neq \emptyset$

実際，次のように要素数を見れば正しいことが観察できる
- $|\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}| = \Delta(G) + 1$
- $|\{c'(u) \mid u \in N_G(v)\}| \leq \deg_G(v) \leq \Delta(G)$



G　G'

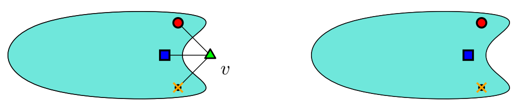
任意の $p \in \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\} - \{c'(u) \mid u \in N_G(v)\}$ を考える
- 観察 A より，そのような p は必ず存在する

染色数の上界：証明 (4)

証明 (続き)：
- G の $\Delta(G) + 1$ 彩色 c を次のように構成する

$$c(u) = \begin{cases} c'(u) & (u \neq v \text{ のとき}) \\ p & (u = v \text{ のとき}) \end{cases}$$

- この c は G の $\Delta(G) + 1$ 彩色である (要確認)　□



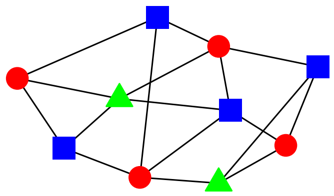
G　G'

証明から得られるアルゴリズム

格言 (第 3 回講義より)

帰納法の証明を素直にたどるとアルゴリズムが得られる

この場合は，どのようなアルゴリズムが得られるのか？



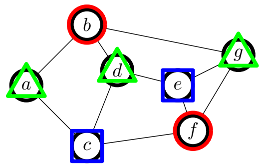
貪欲彩色

アルゴリズム：貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定，パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G)+1\}$
- σ に沿って，頂点に 1 つずつ，色を割り当てる
- 頂点 v を塗るとき，

(1) 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る
(2) 既に使った色で塗れる場合は，既に使った色の中で最小の色で塗る

実行例　　σ: $b\ f\ e\ d\ c\ a\ g$，パレット { ●, ■, ▲, × }



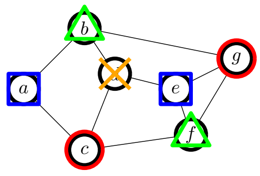
貪欲彩色

アルゴリズム：貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定，パレットは $\{1, 2, \ldots, \Delta(G)+1\}$
- σ に沿って，頂点に 1 つずつ，色を割り当てる
- 頂点 v を塗るとき，

(1) 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る
(2) 既に使った色で塗れる場合は，既に使った色の中で最小の色で塗る

実行例 (別の順序) σ: $g\ e\ f\ c\ a\ b\ d$，パレット { ●, ■, ▲, × }



貪欲彩色の柔軟性

観察

貪欲彩色の出力は全順序 σ に依存する

つまり，σ を変えると，異なる彩色が得られる (かもしれない)

事実 (演習問題)

うまく全順序を選べば，貪欲彩色の費やす色数が染色数になる

つまり，染色数を計算するためには，うまい全順序を見つければよい

今からやること

- そのようなうまい全順序をどう見つけるか？　(次回)
- その全順序が与える彩色が「最適」であることを確認するための証拠は何か？

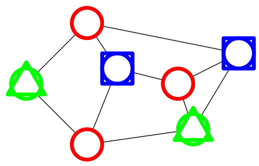
実は，いつもうまくいくとは限らないが，うまくいく場合を紹介する

目次

彩色の最適性

定義：染色数とは？ (再掲)

無向グラフ G の **染色数** とは，G の k 彩色が存在するような最小の k



$\chi(G) = 3$???

疑問

- 3 色未満で塗れないのか？
- 塗れないことをどう示すのか？

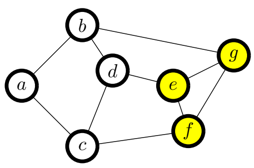
$\leftarrow \chi(G) \leq 3$ しか示してない

クリーク

定義：グラフのクリークとは？

無向グラフ G の **クリーク** とは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G の **クリーク数** と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

- C が G のクリークである
  $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？

直感：C の部分だけで $\chi(G)$ 色は必要となる

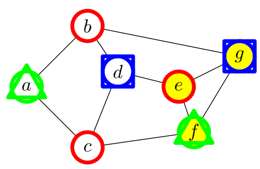
彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：彩色とクリークの弱双対性

G の任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



		e	f	g	
●	$\{b, c, e\}$	1			≤ 1
■	$\{d, g\}$			1	≤ 1
▲	$\{a, f\}$		1		≤ 1
		$\parallel$ 1	$\parallel$ 1	$\parallel$ 1	

彩色とクリークの弱双対性

証明：$\chi(G)$ 彩色を独立集合 $I_1, \dots, I_{\chi(G)}$ への V の分割と捉える

- 各 $i \in \{1, \dots, \chi(G)\}$, $v \in C$ に対して，

$$M_{i,v} = \begin{cases} 1 & (v \in I_i), \\ 0 & (v \notin I_i) \end{cases}$$

として行列 $M \in \mathbb{R}^{\{1,\dots,\chi(G)\} \times C}$ を考える

- 各独立集合 I_i と C は頂点を 2 つ以上共有しないので，

$$\sum_{i=1}^{\chi(G)} \left(\sum_{v \in C} M_{i,v} \right) \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} 1 = \chi(G)$$

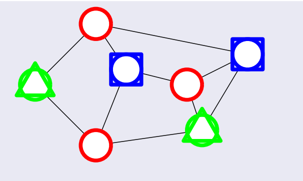
- 各 $v \in C$ は $I_1, \dots, I_{\chi(G)}$ の中のちょうど 1 つの要素なので

$$\sum_{v \in C} \left(\sum_{i=1}^{\chi(G)} M_{i,v} \right) = \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

- したがって，$\chi(G) \geq |C|$ □

彩色が最適であることの確認法

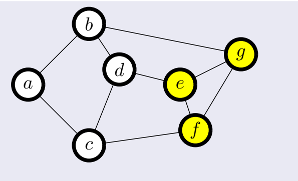
$\chi(G)$ の上界



3 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 3$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 3 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$\therefore \chi(G) = 3$

彩色が最適であることの確認法：まとめ

- k 色で塗る （つまり，$\chi(G) \leq k$）
- 頂点数 k のクリークを見つける （つまり，$\chi(G) \geq k$）
- したがって，$\chi(G) = k$

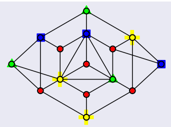
つまり，

彩色問題では，色を塗ることだけではなくて，
クリークを見つけることも重要になる

頂点数の大きなクリークが見つけられるとうれしい

彩色の最適性の証明：例

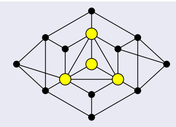
$\chi(G)$ の上界



4 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 4$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 4 のクリークを見つけた

$\therefore \chi(G) \geq 4$

上界と下界が一致した

$\therefore \chi(G) = 4$

染色数がうまく計算できそうな場合

任意の無向グラフ G に対して

- 任意のクリーク C に対して，$\chi(G) \geq |C|$
- 特に，C を頂点数最大のクリークとすると，$\chi(G) \geq \omega(G)$

もし

- k 色で塗れれば，$\chi(G) \leq k$
- 頂点数 k のクリークが見つかれば，$\omega(G) \geq k$
- $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$ となり，$\chi(G) = k = \omega(G)$

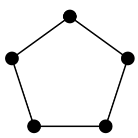
つまり

- $\chi(G) = \omega(G)$ が成り立つかどうかは重要そう

残念ながら，$\chi(G) \neq \omega(G)$ となる場合がある (強双対性は成り立たない)

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (1)

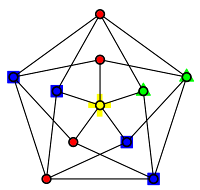
頂点数 5 の閉路 C_5



- $\chi(C_5) = 3$
- $\omega(C_5) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$ となる場合 (2)

グレッチ・グラフ



- $\chi(\text{グレッチ}) = 4$
- $\omega(\text{グレッチ}) = 2$

グレッチ (Grötzsch) ドイツの数学者

目次

今まで登場した双対性 (1)

最大化	最小化	強双対性の有無
マッチング	頂点被覆	×
流れ	カット	○
互いに素な道	連結度	○
クリーク	彩色	×

注：二部グラフに対しては，「マッチング」と「頂点被覆」に強双対性あり

流れとカットの場合の復習

弱双対性
- $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ **ならば** f は最大 s,t 流，S は最小 s,t カット

強双対性
- $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(S)$ となる f, S が必ず存在

格言 (第 6 回講義より)

弱双対性の強力感，強双対性の安心感

今まで登場した双対性 (2)

最大化	最小化	強双対性の有無
マッチング	頂点被覆	×
流れ	カット	○
互いに素な道	連結度	○
クリーク	彩色	×

疑問

強双対性が成り立たない場合はどうするか？

例えば，最大マッチング M と 最小頂点被覆 C に対して，
- $|M| \le |C|$ は必ず成り立つが，$|M| = |C|$ が成り立つとは限らない

しかし，次が成り立つ

性質：最小頂点被覆の 2 近似 (演習問題)

最大マッチング M と最小頂点被覆 C に対して，$|C| \le 2|M|$ が成り立つ

つまり，「強双対性が成り立たない度合い」が抑えられている

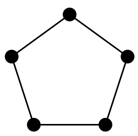
双対性の弱さ：彩色の場合

一方で，クリーク と 彩色 については，
強双対性が成り立たない度合いを抑えられない

性質：無三角グラフの染色数

任意の自然数 $k \ge 3$ に対して，次を満たすグラフ G_k が存在する
- $\chi(G_k) = k$
- $\omega(G_k) = 2$

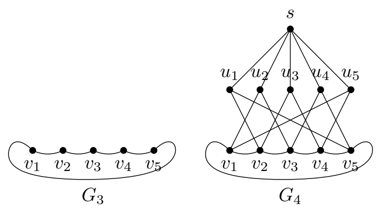
実際にそのようなグラフ G_k を構成する (ミチェルスキの構成法)
- G_3 は頂点数 5 の閉路 ($\chi(G_3) = 3, \omega(G_3) = 2$)



双対性の弱さ：彩色の場合 — 証明 (1)

任意の $k \ge 3$ を考える
- $G_k = (V_k, E_k)$ が既に構成されているとする
  - $V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ とする
- G_k から $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ を次のように構成する

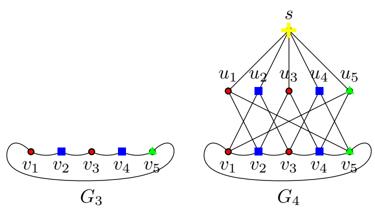
$$V_{k+1} = V_k \cup \{u_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{s\}$$
$$E_{k+1} = E_k \cup \{\{v_i, u_j\} \mid \{v_i, v_j\} \in E_k\} \cup \{\{s, u_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$



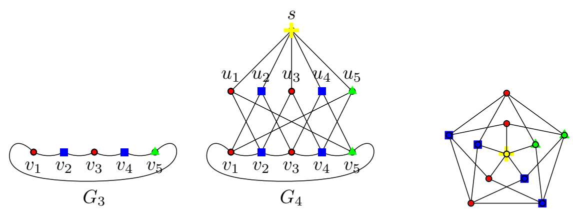
双対性の弱さ：彩色の場合 — 証明 (2)

観察 (演習問題)

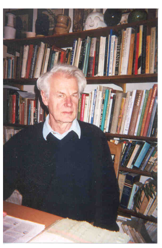
G_k に頂点数 3 のクリークがない $\Rightarrow$ G_{k+1} には頂点数 3 のクリークがない
G_k の染色数が k $\Rightarrow$ G_{k+1} の染色数は $k+1$



ミチェルスキの構成法とグレッチ・グラフ



ミチェルスキとグレッチ



Jan Mycielski
(1932–)

Herbert Grötzsch
(1902–1993)

https://spot.colorado.edu/~jmyciel/
https://opc.mfo.de/detail?photo_id=1441

目次

今日のまとめ

今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- 彩色と染色数
- 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- 貪欲彩色による上界
- 弱双対性の弱さの評価：ミチェルスキの構成法