グラフとネットワーク　第 10 回

連結性：数理とモデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 6 月 18 日

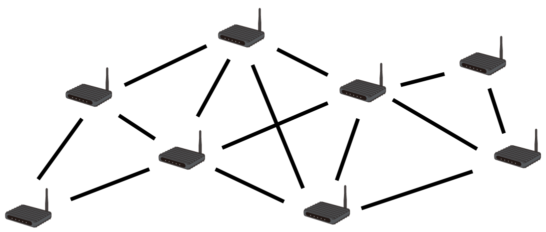
最終更新：2021 年 6 月 10 日　10:08

概要

今日の目標

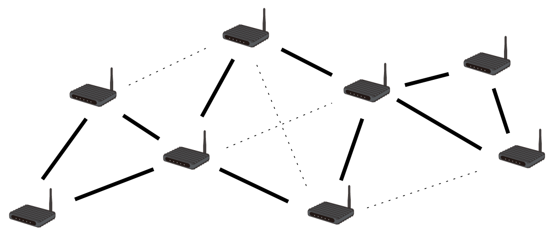
- グラフの連結性に関する概念を理解し，正しく使えるようになる
- 連結度に関するメンガーの定理を最大流と関係づけられるようになる

センサネットワークにおける通信



https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

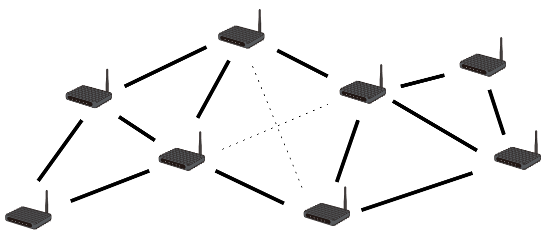
センサネットワークにおける通信：リンク故障



https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

$\rightsquigarrow$ 辺連結度：リンク故障への耐性を表す数

センサネットワークにおける通信：ノード故障



https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

$\rightsquigarrow$ 点連結度：ノード故障への耐性を表す数

目次

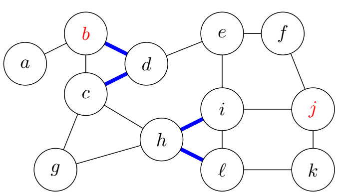
非連結化集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

定義：非連結化集合とは？

辺部分集合 $F \subseteq E$ が G の s, t **非連結化集合**であるとは，
$G - F$ において，s と t を端点とする道が存在しないこと

青い辺から成る集合は b, j 非連結化集合



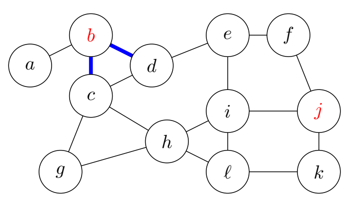
辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

定義：辺連結度とは？

G の s, t **辺連結度**とは，G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda(G; s, t)$ で表す　　($\lambda_G(s, t)$, $\lambda_{s,t}(G)$ と表すこともある)



$\lambda(G; b, j) = 2$

これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

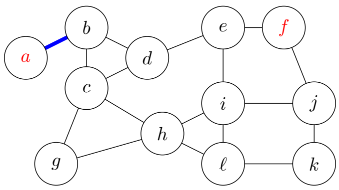
大域辺連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：大域辺連結度とは？

G の**大域辺連結度**とは，$\lambda(G) = \min\{\lambda(G; s, t) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり，s, t 辺連結度の $(s, t$ の選び方に関する$)$ 最小値

G の大域辺連結度を単に G の辺連結度とも呼ぶ



$$\lambda(G) = \lambda(G; a, f) = 1$$

これは大域的，全体的なリンク故障耐性を表す

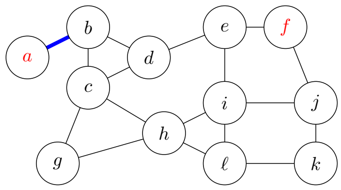
辺連結性：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \geq 0$

定義：辺連結性とは？

G が k **辺連結**であるとは，$\lambda(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k-1$ 以下の辺部分集合を除去して G を非連結にできない

このグラフは 1 辺連結であるが，2 辺連結ではない



注：G が連結 ⇔ G が 1 辺連結

目次

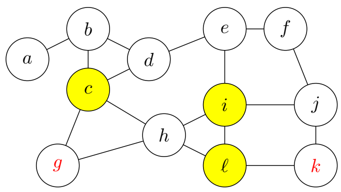
分離集合：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$)

定義：分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t **分離集合**であるとは，
$G - S$ において，s から t への道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は g, k 分離集合



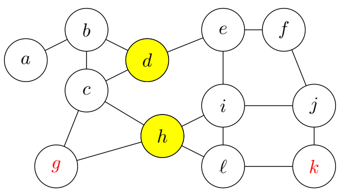
点連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$)

定義：点連結度とは？

G の s, t **点連結度**とは，G の s, t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa(G; s, t)$ で表す　　($\kappa_G(s, t)$，$\kappa_{s,t}(G)$ と表すこともある)



$$\kappa(G; g, k) = 2$$

これは局所的，部分的なノード故障耐性を表す

大域点連結度：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

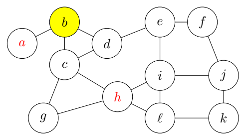
定義：大域点連結度とは？

G の**大域点連結度**とは，G が完全グラフではない場合

$$\kappa(G) = \min\{\kappa(G; s, t) \mid s, t \in V, s \neq t, \{s, t\} \notin E\}$$

つまり，s, t 点連結度の $(s, t$ の選び方に関する$)$ 最小値

頂点数 n の完全グラフ K_n に対して，$\kappa(K_n) = n - 1$ と定義する



これは大域的，全体的なノード故障耐性を表す

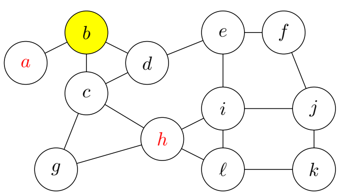
点連結性：無向グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \geq 0$

定義：点連結性とは？

G が k **点連結**であるとは，$\kappa(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合を除去しても G は連結

このグラフは 1 点連結であるが，2 点連結ではない



注：G が連結 ⇔ G が 1 点連結

用語の対応：無向グラフ

辺	頂点
s, t 非連結化集合	s, t 分離集合
s, t 辺連結度	s, t 点連結度
$\lambda(G; s, t)$	$\kappa(G; s, t)$
大域辺連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 辺連結	k 点連結

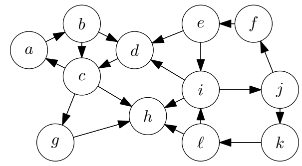
目次

有向グラフの強連結性

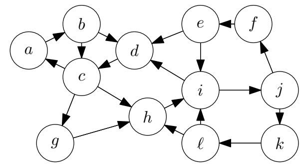
有向グラフ $G = (V, A)$

定義：有向グラフが強連結であるとは？

G が**強連結**であるとは，任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，
u を始点，v を終点とする有向道が存在すること



強連結でない (h に注目)



強連結である

注：「グラフが強連結している」とは言わない

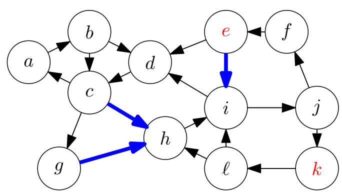
非連結化集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

定義：非連結化集合とは？

弧部分集合 $F \subseteq A$ が G の s, t **非連結化集合**であるとは，
$G - F$ において，s を始点，t を終点とする有向道が存在しないこと

青い弧から成る集合は e, k 非連結化集合



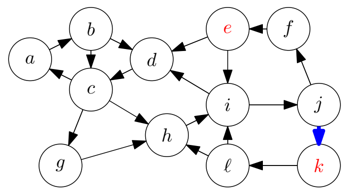
弧連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

定義：弧連結度とは？

G の s, t **弧連結度**とは，G の s, t 非連結化集合の要素数の最小値

$\lambda(G; s, t)$ で表す ($\lambda_G(s, t)$，$\lambda_{s,t}(G)$ と表すこともある)



$\lambda(G; e, k) \le 2 = 1$

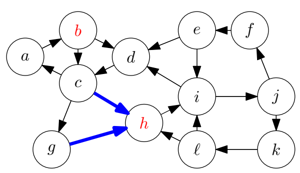
これは局所的，部分的なリンク故障耐性を表す

弧連結度：有向グラフ (注意)

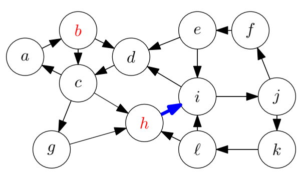
有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$

注意

$\lambda(G; s, t) \neq \lambda(G; t, s)$ かもしれない



$\lambda(G; b, h) = 2$



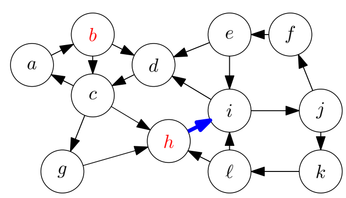
$\lambda(G; h, b) = 1$

大域弧連結度：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$

定義：大域弧連結度とは？

G の**大域弧連結度**とは，$\lambda(G) = \min\{\lambda(G; s, t) \mid s, t \in V, s \neq t\}$
つまり，s, t 弧連結度の (s, t の選び方に関する) 最小値



$\lambda(G) = 1$

これは大域的，全体的なリンク故障耐性を表す

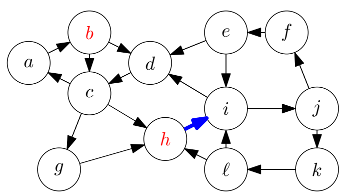
弧連結性：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，自然数 $k \geq 0$

定義：弧連結性とは？

G が k **弧連結**であるとは，$\lambda(G) \geq k$ であること
つまり，要素数 $k-1$ 以下の弧部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 弧連結であるが，2 弧連結ではない



注：G が強連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 弧連結

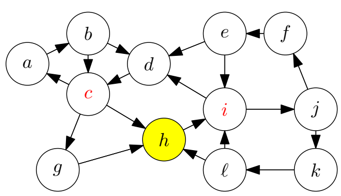
分離集合：有向グラフ

有向グラフ $G = (V, A)$，異なる 2 頂点 $s, t \in V$ (ただし，$(s, t) \notin A$)

定義：分離集合とは？

頂点集合 $S \subseteq V - \{s, t\}$ が G の s, t **分離集合**であるとは，
$G - S$ において，s から t への有向道が存在しないこと

黄色の頂点から成る集合は c, i 分離集合



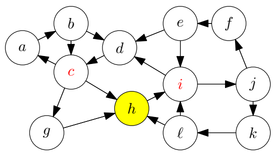
点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G=(V,A)$，異なる 2 頂点 $s,t \in V$（ただし，$(s,t) \notin A$）

定義：点連結度とは？

G の s,t **点連結度**とは，G の s,t 分離集合の要素数の最小値

$\kappa(G;s,t)$ で表す　　（$\kappa_G(s,t)$，$\kappa_{s,t}(G)$ と表すこともある）



$\kappa(G;c,i)=1$

これは局所的，部分的なノード故障耐性を表す

注：$\kappa(G;s,t) \neq \kappa(G;t,s)$ かもしれない

大域点連結度：有向グラフ

有向グラフ $G=(V,A)$

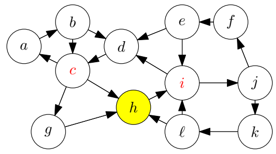
定義：大域点連結度とは？

G の**大域点連結度**とは，ある $u,v \in V$ に対して $(u,v) \notin A$ であるとき，

$$\kappa(G)=\min\{\kappa(G;s,t) \mid s,t \in V, s \neq t, (s,t) \notin A\}$$

つまり，s,t 点連結度の（s,t の選び方に関する）最小値

任意の $u,v \in V$（$u \neq v$）に対して $(u,v) \in A$ であるとき，$\kappa(G)=|V|-1$ と定義



$\kappa(G)=1$

これは大域的，全体的なノード故障耐性を表す

点連結性：有向グラフ

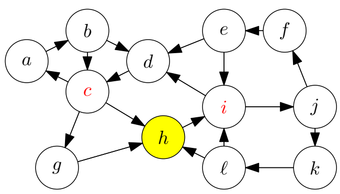
有向グラフ $G=(V,A)$，自然数 $k \geq 0$

定義：点連結性とは？

G が k **点連結**であるとは，$\kappa(G) \geq k$ であること

つまり，要素数 $k-1$ 以下の頂点部分集合をどう除去しても G は強連結

このグラフは 1 点連結であるが，2 点連結ではない



注：G が強連結 $\Leftrightarrow$ G が 1 点連結

用語の対応：有向グラフ

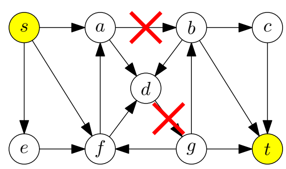
弧	頂点
s,t 非連結化集合	s,t 分離集合
s,t 弧連結度	s,t 点連結度
$\lambda(G;s,t)$	$\kappa(G;s,t)$
大域弧連結度	大域点連結度
$\lambda(G)$	$\kappa(G)$
k 弧連結	k 点連結

目次

s,t 弧連結度をどのように計算するか？

目標

s,t 弧連結度の計算を最小 s,t カット問題としてモデル化する



最小 s,t カット問題としてのモデル化：着眼点

観察

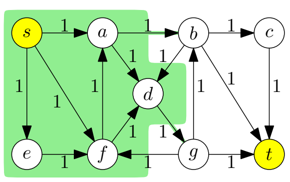
弧を除去すると s から t へ行けなくなる

$\Rightarrow$ 弧を除去した後に，s からたどり着ける部分は G の s,t カット

$\Rightarrow$ 除去した弧の数 $=$ その s,t カットから出る弧の数

$\Rightarrow$ 全ての弧容量 $=1$ ならば，
s,t カットから出る弧の数 $=$ s,t カットの容量

$\therefore$ 最小 s,t カットの容量から弧連結度が分かる

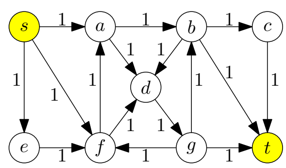


最小 s,t カット問題としてのモデル化

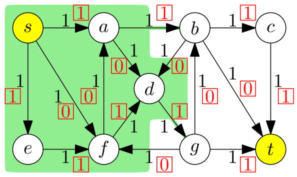
s,t 弧連結度を計算する問題を最小 s,t カット問題としてモデル化する

モデル化

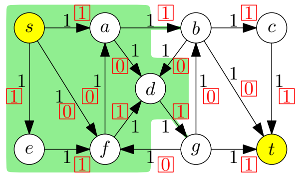
- グラフ：そのまま
- 容量：すべての弧の容量 $=1$

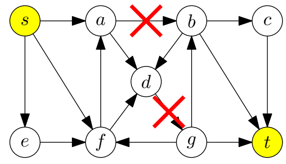


最小 s,t カット問題：最大 s,t 流と最小 s,t カット



解いた結果を再解釈 (1)

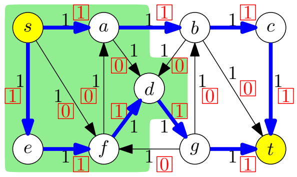




- s,t カットから出る弧が弧連結度を与える
- s,t 流は何に対応するか？

整数流定理と容量の決め方から，各弧上を流れている量は 0 か 1

解いた結果を再解釈 (2)

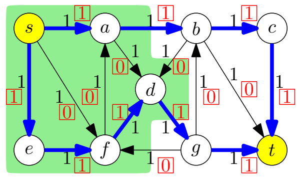


- 1 だけ流れている弧だけ見てみると，道が構成できる
- 道の数 $=$ 最大 s,t 流の値 $=$ s,t 弧連結度
- $\therefore$ 流れが道に対応している
- 注：これらの道は同じ弧を共有しない

「流れ」という比喩

流れ	——	道の集合
たくさん流す	——	道を多く選ぶ

メンガーの定理



最大流最小カット定理より，
任意の有向グラフ $G=(V,A)$，任意の $s,t \in V$ に対して

定理：メンガーの定理 (有向グラフ・弧連結度版)

s を始点，t を終点とする有向道で弧を共有しないものの最大数 $=$ s,t 弧連結度

Karl Menger

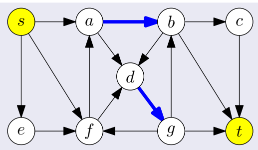
Karl Menger
カール・メンガー
(1902–1985)

http://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger

双対性の利用法

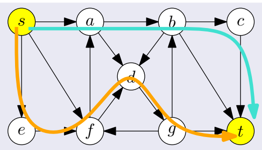
次のグラフの s,t 弧連結度は何か？

上界



s,t 弧連結度 ≤ 2

下界 (かかい)



s,t 弧連結度 ≥ 2

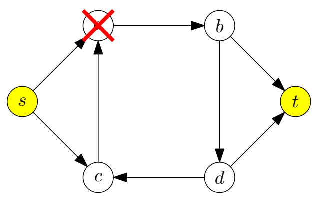
したがって，s,t 弧連結度 $=2$

目次

s,t 点連結度をどのように計算するか？

目標

s,t 点連結度の計算を最小 s,t カット問題としてモデル化する

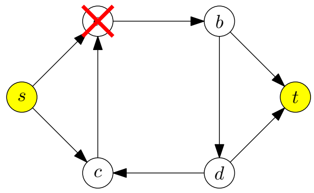


最小 s,t カット問題としてのモデル化：着眼点

観察

s,t 弧連結度のときと同様に，s,t カットを見てみたい
- しかし，s,t カットを見るときに壊すのは弧

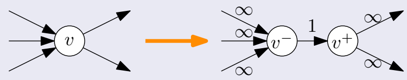
$\therefore$ 頂点の問題を弧の問題に変換するため，グラフに操作を施す

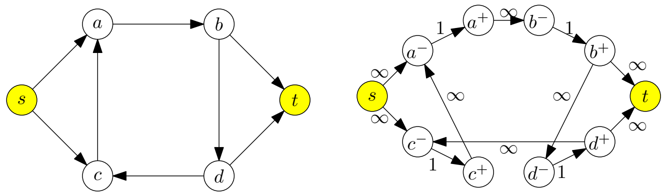


最小 s,t カット問題としてのモデル化：操作

行う操作

各頂点に対して次の操作を行い，弧の容量も次のように定める

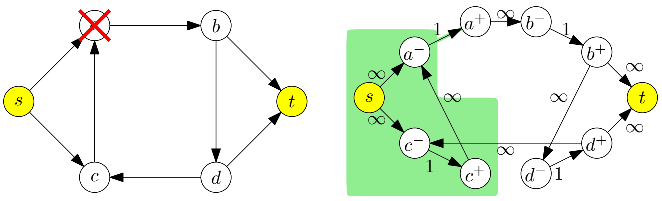




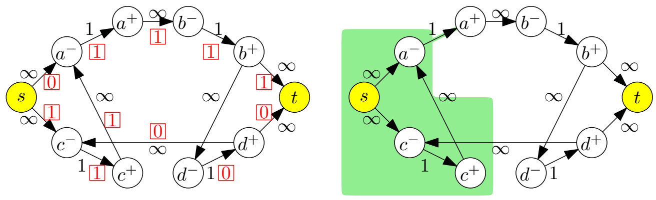
最小 s,t カット問題としてのモデル化：操作に対する直感

- 最小 s,t カットから容量 ∞ の弧が出ていけない

$\therefore$ 最小 s,t カットから出る弧の容量はすべて 1
- そのような弧はもとのグラフにおける頂点に対応
- 対応する頂点を取り除けば，s から t に行けなくなる

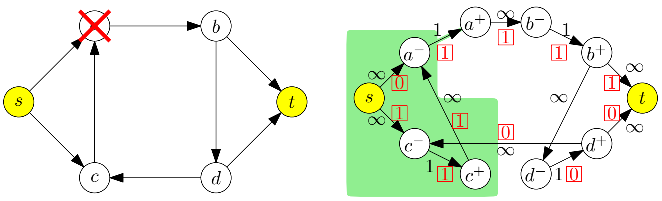


最大 s,t 流と最小 s,t カット



最大 s,t 流の値 $= 1 =$ 最小 s,t カットの容量

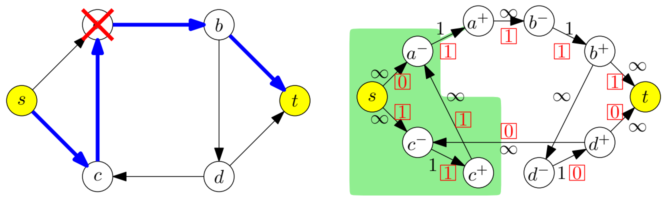
解いた結果を再解釈 (1)



- s,t カットから出る弧に対応する頂点が s,t 点連結度を与える
- s,t 流は何に対応するか？

整数流定理と容量の決め方から，各弧上を流れている量は 0 か 1

解いた結果を再解釈 (2)

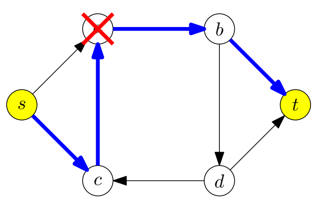


- 1 だけ流れている弧に対応する部分は道になる
- 道の数 $=$ 最大 s,t 流の値 $=$ s,t 点連結度
- $\therefore$ 流れが道に対応している
- 注：これらの道は s,t 以外の頂点を共有しない

「流れ」という比喩

流れ	——	道の集合
たくさん流す	——	道を多く選ぶ

メンガーの定理 (点連結度版)



最大流最小カット定理より，任意の有向グラフ $G = (V, A)$，
任意の $s, t \in V$ (ただし，$(s,t) \notin A$) に対して

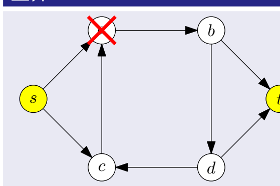
定理：メンガーの定理 (有向グラフ・点連結度版)

s を始点，t を終点とする有向道で
頂点を s,t 以外共有しないものの最大数 $=$ s,t 点連結度

双対性の利用法

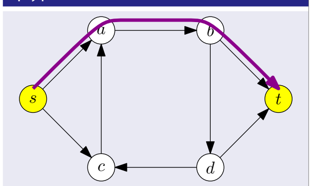
次のグラフの s,t 点連結度は何か？

上界



s,t 点連結度 ≤ 1

下界



s,t 点連結度 ≥ 1

したがって，s,t 点連結度 $= 1$

補足：無向グラフにおける辺連結度と点連結度

メンガーの定理は無向グラフでも成立する

定理：メンガーの定理 (無向グラフ・辺連結度版)

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の $s, t \in V$ に対して

s と t を端点とする道で辺を共有しないものの最大数 $=$ s, t 辺連結度

定理：メンガーの定理 (無向グラフ・点連結度版)

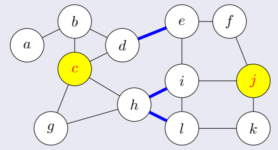
任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と
任意の $s, t \in V$ (ただし，$\{s, t\} \notin E$) に対して

s と t を端点とする道で s, t 以外に頂点を共有しないものの最大数 $=$ s, t 点連結度

証明は演習問題

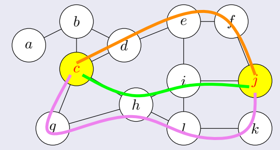
双対性の利用法

上界



c, j 辺連結度 ≤ 3

下界

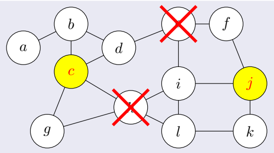


c, j 辺連結度 ≥ 3

したがって，c, j 辺連結度 $= 3$

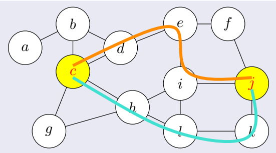
双対性の利用法

上界



c, j 点連結度 ≤ 2

下界



c, j 点連結度 ≥ 2

したがって，c, j 点連結度 $= 2$

目次

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの連結性に関する概念を理解し，正しく使えるようになる
- 連結度に関するメンガーの定理を最大流と関係づけられるようになる