グラフとネットワーク　第 8 回

最大流：モデル化 (2) 二部グラフの最大マッチング

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 6 月 4 日

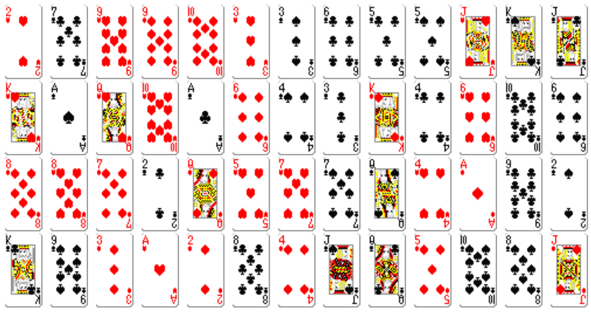
最終更新：2021 年 5 月 27 日　08:47

概要

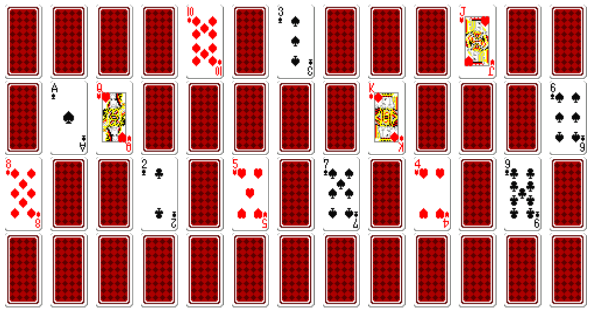
今日の目標

- 最大流最小カット定理を用いて，二部グラフにおける最大マッチングと最小頂点被覆の強双対性を証明する
- 二部グラフにおいて，片側を飽和するマッチングが存在するための必要十分条件 (Hall の結婚定理) を証明する
- Hall の結婚定理を用いて，様々な問題を解決する
  - ドミノ・タイリング
  - トランプ・マジック（？）
  - 四目並べ

トランプ・マジック？



トランプ・マジック？ (続)

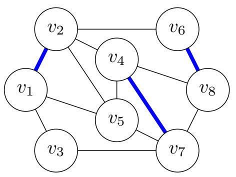


グラフにおけるマッチング

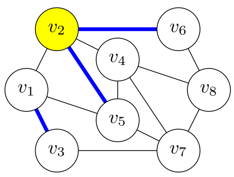
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：マッチングとは？

G の **マッチング** とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

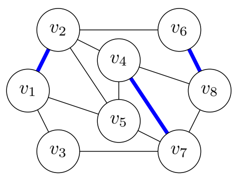
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を **飽和** する

最大マッチング

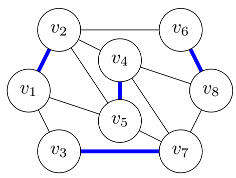
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：最大マッチングとは？

G の **最大マッチング** とは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない



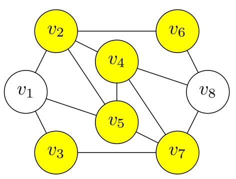
最大マッチングである

頂点被覆

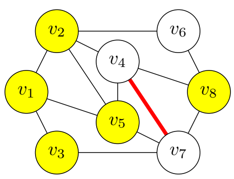
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：頂点被覆とは？

G の **頂点被覆** とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

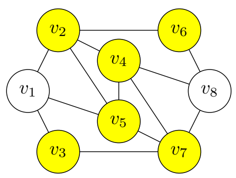
頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を **覆う** (被覆する)

最小頂点被覆

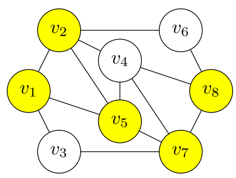
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：最小頂点被覆とは？

G の **最小頂点被覆** とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で，
G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
最小頂点被覆ではない



$\{v_1, v_2, v_5, v_7, v_8\}$ は
最小頂点被覆である

双対性：ここまでのまとめ

マッチングと頂点被覆

弱双対性 (成立)

最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数

強双対性 (不成立の場合も)

最大マッチングの辺数 $\overset{?}{=}$ 最小頂点被覆の頂点数

流れとカット

弱双対性 (成立)

最大 s,t 流の値 $\leq$ 最小 s,t カットの容量

強双対性 (成立)

最大 s,t 流の値 $=$ 最小 s,t カットの容量

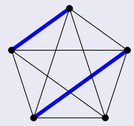
加えて，整数流定理

頂点被覆の重要性：注意

注意

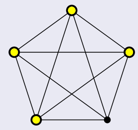
要素数が同じであるマッチングと頂点被覆が必ず存在するわけではない

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 2

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

しかし，存在する場合には，マッチングの最大性を保証できる

双対性：今日の内容

マッチングと頂点被覆

弱双対性 (成立)

最大マッチングの辺数 $\leq$ 最小頂点被覆の頂点数

強双対性 (二部グラフ では成立)

最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数

Kőnig–Egerváry の定理

流れとカット

弱双対性 (成立)

最大 s,t 流の値 $\leq$ 最小 s,t カットの容量

強双対性 (成立)

最大 s,t 流の値 $=$ 最小 s,t カットの容量

加えて，整数流定理

D. Kőnig と J. Egerváry

Dénes Kőnig
ケーニグ
(1894–1944)

Jenő Egerváry
エゲルヴァーリ
(1891–1958)

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-marriage

http://www.cs.elte.hu/egres/www/intro.html

目次

二部グラフ (復習)

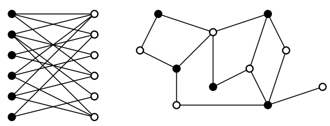
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：二部グラフとは？

G が **二部グラフ** であるとは，
- 頂点集合 V を 2 つの集合 A, B に分割できて
- どの辺 $e \in E$ も一端点を A に持ち，もう一端点を B に持つもの

A と B を G の **部集合** と呼ぶ

二部グラフの例



二部グラフの最大マッチング：Kőnig–Egerváry の定理

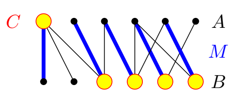
二部グラフ $G = (V, E)$

Kőnig–Egerváry の定理 (1931)

G の最大マッチング M，G の最小頂点被覆 C に対して

$$|M| = |C|$$

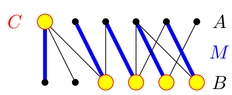
例：$|M| = |C| = 5$

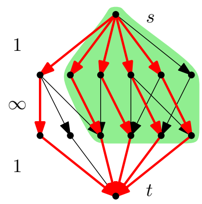


Kőnig–Egerváry の定理：証明の方針

任意の二部グラフ $G = (V, E)$ を考える

1. 有向グラフ $G' = (V', A')$ を作り，弧に容量を与える ($V' = V \cup \{s, t\}$)
2. 次の対応を見る (整数流定理を用いる)
   - G の最大マッチング $\leftrightarrow$ G' の最大 s,t 流
   - G の最小頂点被覆 $\leftrightarrow$ G' の最小 s,t カット
3. 最大流最小カット定理 (強双対性) より，
   最大マッチングの辺数 $=$ 最小頂点被覆の頂点数

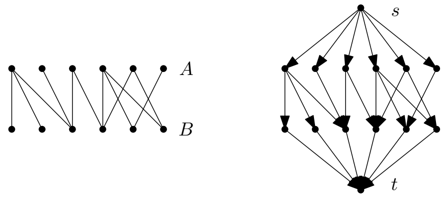




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (有向グラフの構成)

証明：任意の二部グラフ $G=(V,E)$ を考え，その部集合を A,B とする
- 次のように有向グラフ $G'=(V',A')$ を作る

$$\begin{aligned} V' &= V\cup\{s,t\},\\ A' &= \{(u,v)\mid \{u,v\}\in E, u\in A, v\in B\}\cup\\ &\quad \{(s,u)\mid u\in A\}\cup\{(v,t)\mid v\in B\} \end{aligned}$$

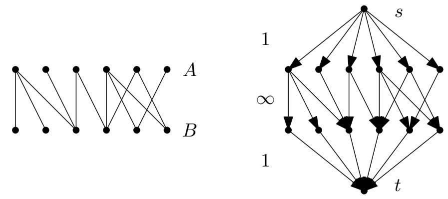


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (容量の決定)

- G' の各弧 (x,y) に対して容量を次のように定める

$$c((x,y)) = \begin{cases} 1 & (x=s \text{ または } y=t \text{ のとき})\\ \infty & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

- 注：「∞」は「十分大きな整数」であると見なす

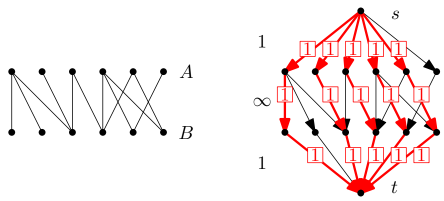


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (定理の適用)

- 最大流最小カット定理より，G' において

$$\text{最大 } s,t \text{ 流の値} = \text{最小 } s,t \text{ カットの容量}$$

- 整数流定理より，各弧における流量が整数である最大 s,t 流が存在
- そのような整数最大 s,t 流を $f\colon A'\to\mathbb{Z}$ とする

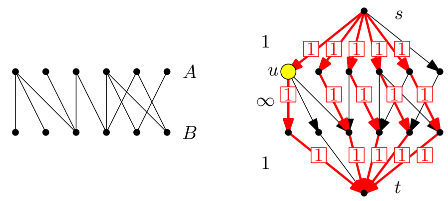


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (1))

- 容量制約より，任意の $(s,u)\in A'$ に対して

$$0\le f((s,u))\le 1$$

- f の整数性より，$f((s,u))$ は 0 か 1

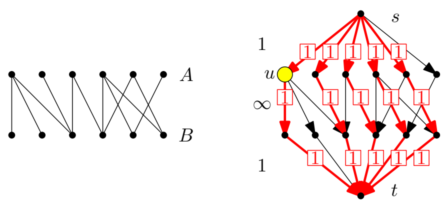


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (2))

- 流量保存制約より，任意の $u\in A$ に対して，

$$f((s,u)) = \sum_{v\in B:(u,v)\in A'} f((u,v))$$

- 左辺 $f((s,u))$ は 0 か 1 なので，この右辺も 0 か 1
- 特に，$f((s,u))$ が 1 であるとき，
  $f((u,v))=1$ と $(u,v)\in A'$ を満たす $v\in B$ が
  ただ 1 つ存在する ....(性質 1)

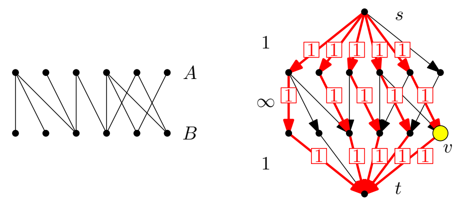


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (3))

- 容量制約より，任意の $(v,t)\in A'$ に対して

$$0\le f((v,t))\le 1$$

- f の整数性より，$f((v,t))$ は 0 か 1

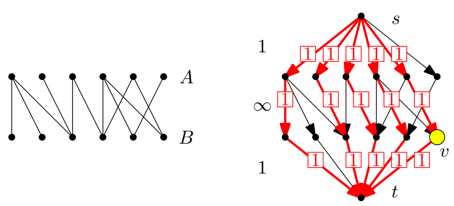


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (4))

- 流量保存制約より，任意の $v\in B$ に対して，

$$f((v,t)) = \sum_{u\in A:(u,v)\in A'} f((u,v))$$

- 左辺 $f((v,t))$ は 0 か 1 なので，この右辺も 0 か 1
- 特に，$f((v,t))$ が 1 であるとき，
  $f((u,v))=1$ と $(u,v)\in A'$ を満たす $u\in A$ が
  ただ 1 つ存在する ....(性質 2)

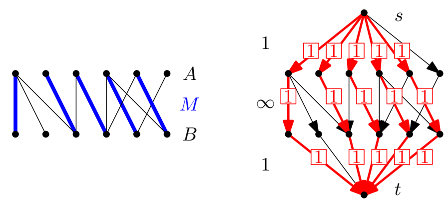


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (マッチングの構成 (5))

- ここで，

$$M=\{\{u,v\}\in E\mid f((u,v))=1\}$$

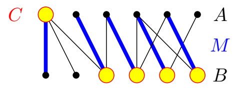
  とすると，性質 1 と性質 2 から M は G のマッチング
- また，$\mathrm{val}(f)=|M|$ である

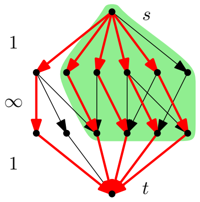


Kőnig–Egerváry の定理：証明の方針 (再掲)

任意の二部グラフ $G=(V,E)$ を考える

1. 有向グラフ $G'=(V',A')$ を作り，弧に容量を与える ($V'=V\cup\{s,t\}$)
2. 次の対応を見る (整数流定理を用いる)
   G の最大マッチング $\leftrightarrow$ G' の最大 s,t 流
   G の最小頂点被覆 $\leftrightarrow$ G' の最小 s,t カット
3. 最大流最小カット定理 (強双対性) より，
   最大マッチングの辺数 ＝ 最小頂点被覆の頂点数

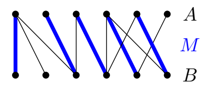


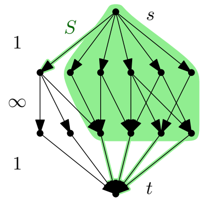


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (1))

- 最小 s,t カット S を考える
- このとき，s,t カットの定義より，$s\in S$ かつ $t\notin S$
- 集合 $\{s\}$ は s,t カットであり，その容量は $\mathrm{cap}(\{s\})=|A|$ なので，

$$\mathrm{cap}(S)\le\mathrm{cap}(\{s\})=|A|$$





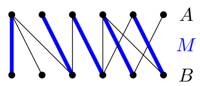
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (2))

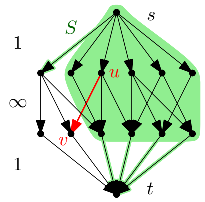
観察 3

$u\in S,\ v\notin S,\ (u,v)\in A'$ となる $u\in A$ と $v\in B$ は存在しない

なぜか？

- 存在するとすると，$\mathrm{cap}(S)\ge c((u,v))=\infty$
- これは，$\mathrm{cap}(S)\le|A|<\infty$ に矛盾



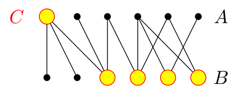


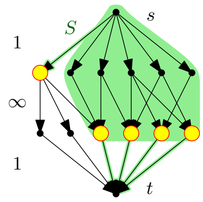
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (3))

- ここで，$C=(A-S)\cup(B\cap S)$ とする

今から確かめること

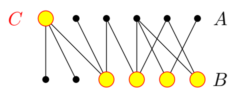
1. この C が G の最小頂点被覆となること
2. $|C|=\mathrm{cap}(S)$

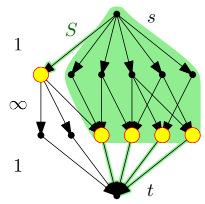




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (4))

- C が G の頂点被覆でないと仮定する
- つまり，
  ある $\{u,v\}\in E$ ($u\in A, v\in B$) が存在して，$u\notin C$ かつ $v\notin C$
- $u\in A$ かつ $u\notin A-S$ なので，$u\in S$
- $v\in B$ かつ $v\notin B\cap S$ なので，$v\notin S$
- これは観察 3 に矛盾し，つまり，C は G の頂点被覆である．

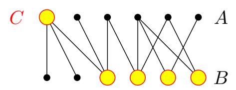


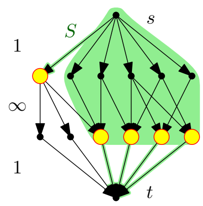


Kőnig–Egerváry の定理：証明 (頂点被覆の構成 (5))

観察 3 から

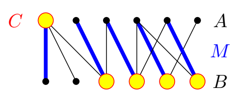
$$\begin{aligned}\mathrm{cap}(S) &= \sum_{u\in A:u\notin S} c((s,u))+\sum_{v\in B:v\in S} c((v,t))\\ &= \sum_{u\in A-S} 1+\sum_{v\in B\cap S} 1\\ &= |A-S|+|B\cap S|=|(A-S)\cup(B\cap S)|=|C|\end{aligned}$$

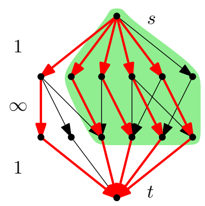




Kőnig–Egerváry の定理：証明 (まとめ (1))

- s,t 流 f から，最大マッチングの辺数 $\ge|M|=\mathrm{val}(f)$
- s,t カット S から，最小頂点被覆の頂点数 $\le|C|=\mathrm{cap}(S)$
- 最大流最小カット定理より，$\mathrm{val}(f)=\mathrm{cap}(S)$



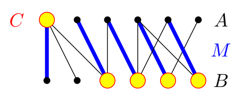


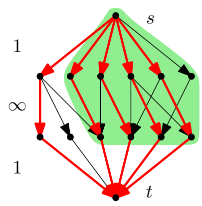
Kőnig–Egerváry の定理：証明 (まとめ (2))

- したがって，マッチングと頂点被覆の弱双対性より

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(f) &\le \text{最大マッチングの辺数}\\ &\le \text{最小頂点被覆の頂点数}\\ &\le \mathrm{cap}(S)=\mathrm{val}(f)\end{aligned}$$

- すなわち，最大マッチングの辺数 ＝ 最小頂点被覆の頂点数 □





二部グラフの最大マッチング：Kőnig–Egerváry の定理：補足

二部グラフ $G = (V, E)$

Kőnig–Egerváry の定理 (1931)

G の最大マッチング M，G の最小頂点被覆 C に対して

$$|M| = |C|$$

「流れ」という比喩

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

補足

実験第一で扱った「二部グラフの最大マッチング」における増加道法は
第 6 回講義で紹介した最大流問題に対する増加道法を
二部グラフの最大マッチング問題に適用したもの

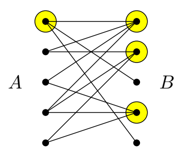
目次

P. Hall

Philip Hall
ホール
(1904–1982)

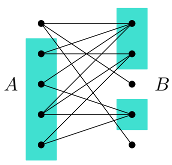
http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-marriage

二部グラフが A を飽和するマッチングを持たないことの確認法？ (1)



- ∴ | 最大マッチング | ≤ 4
- ∴ このグラフは A の頂点をすべて飽和するマッチングを持たない

二部グラフが A を飽和するマッチングを持たないことの確認法？ (2)



- A の青い部分を飽和させるだけの頂点が B にない
- ∴ このグラフは A の頂点をすべて飽和するマッチングを持たない

今から証明すること

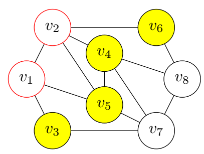
そのような部分がなければ，所望のマッチングを必ず作れる

まずは用語の定義から…

近傍

定義：近傍とは？

- 無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の **近傍** とは
  v の隣接頂点全体の集合
  $$N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$
- 無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点集合 $S \subseteq V$ の **近傍** とは
  $$N_G(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N_G(v)\right) - S$$



- $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N_G(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

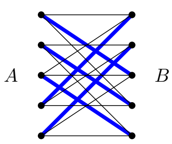
二部グラフの片側を飽和するマッチングの存在性

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ ⇔
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ (結婚条件)

例：



「⇐」の証明に，Kőnig–Egerváry の定理を用いる

Hall の結婚定理：証明 (1)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ ⇔
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ (結婚条件)

⇒ の証明：演習問題

Hall の結婚定理：証明 (2)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ (結婚条件)

$\Leftarrow$ の証明：対偶を証明する

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N_G(S)|$

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとき，

$$G \text{ の最大マッチングの辺数} < |A|$$

Hall の結婚定理：証明 (3)

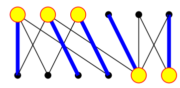
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N_G(S)|$

証明：A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たないとする

- このとき，G の最大マッチングの辺数 $< |A|$
- Kőnig–Egerváry の定理より，G の最小頂点被覆の頂点数 $< |A|$
- C を G の最小頂点被覆とする ($|C| < |A|$)
- $A \cap C$ と $B \cap C$ を考える



Hall の結婚定理：証明 (4)

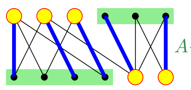
二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N_G(S)|$

証明 (続き)：

- $|A \cap C| + |B \cap C| = |C| < |A|$
- よって，$|B \cap C| < |A| - |A \cap C| = |A - C|$
- C は頂点被覆なので，$A - C$ と $B - C$ の間に辺はない
- したがって，$N_G(A - C) \subseteq B \cap C$



Hall の結婚定理：証明 (5)

二部グラフ $G = (V, E)$，部集合 A, B

証明すること

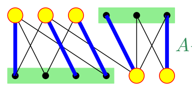
A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持たない $\Rightarrow$
ある頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| > |N_G(S)|$

証明 (続き)：

- 以上をまとめると，

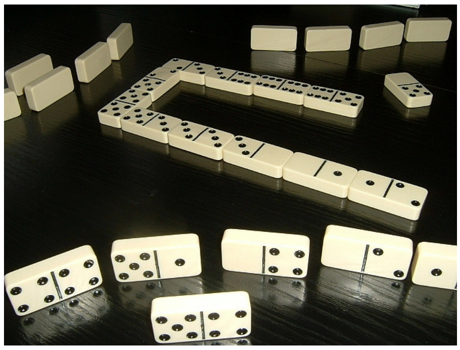
$$|N_G(A - C)| \leq |B \cap C| < |A - C|$$

- つまり，$S = A - C$ とすると，$|N_G(S)| < |S|$ □



目次

ドミノ

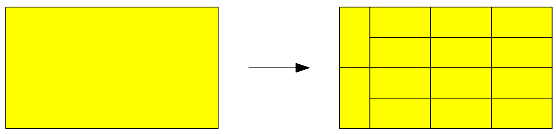


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dominospiel.JPG

ドミノ・タイリング

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dominoes_tiles.jpg

ドミノ・タイリング：問題



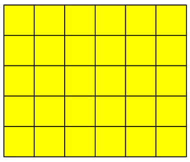
考えたい問題

与えられた盤面をドミノ牌で敷き詰められるか？

タイリング ＝ 敷き詰め

ドミノ・タイリング：例 1

この盤面はドミノ牌で敷き詰められるか？

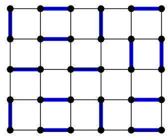


簡単な考察

敷き詰められるならば，マス目の沿って敷き詰めないといけない

ドミノ・タイリング：例 1

グラフとしてモデル化



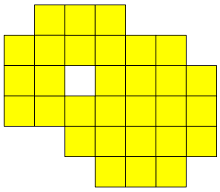
分かること

考えている盤面をドミノ牌で敷き詰め可能 ⇔
このように構成したグラフに完全マッチングが存在

$\boxed{\text{注}}$：このように構成したグラフは二部グラフ

ドミノ・タイリング：例 2

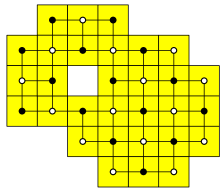
この盤面はドミノ牌で敷き詰められるか？



敷き詰められることを示すには？ → 敷き詰め方を見つければよい
敷き詰められないことを示すには？ → ？？？？？

ドミノ・タイリング：例 2

グラフとしてモデル化

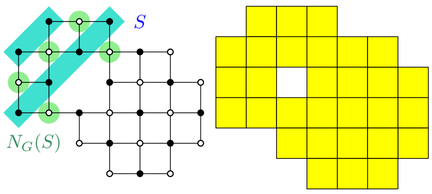


分かること (再掲)

考えている盤面をドミノ牌で敷き詰め可能 ⇔
このように構成したグラフに完全マッチングが存在

ドミノ・タイリング：例 2

完全マッチングは存在するか？



$|S| = 6 > 5 = |N_G(S)|$

Hall の結婚定理

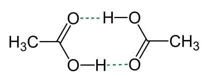
二部グラフ G に A の頂点をすべて飽和するマッチングが存在
(部集合は A, B)
⇔ 任意の $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$

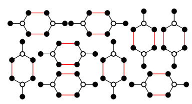
∴ この盤面はドミノ牌で敷き詰められない！

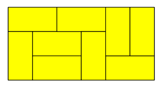
動機：なぜドミノ・タイリングを考えるのか？

統計力学からの動機

二量体モデル







https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Acetic_Acid_Hydrogenbridge_V.1.svg

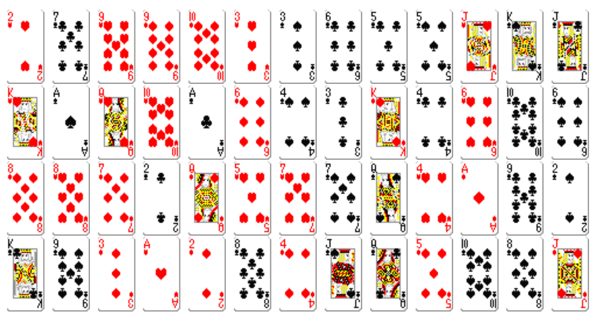
統計力学で行いたいこと

ドミノ・タイリングの総数計算
- ドミノ・タイリングが存在しない ⇔ ドミノ・タイリングの総数 $= 0$

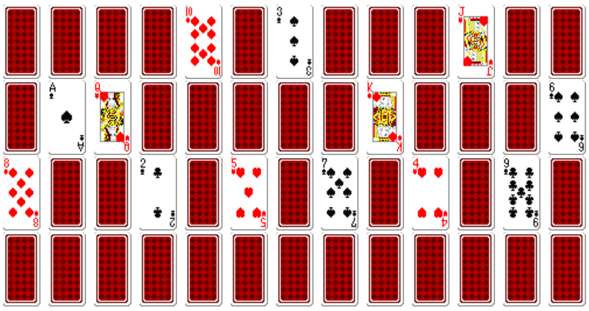
⇝ 『離散数理工学』

目次

トランプ・マジック？



トランプ・マジック？ (続)



トランプ・マジック (?) のからくり

命題

トランプのカード 52 枚を 4 枚ずつ 13 個の組へ任意に分けたとき，
各組から 1 枚ずつカードをうまく選ぶと，
A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K を 1 つずつ取り出せる

Hall の結婚定理を使って，この命題を証明する

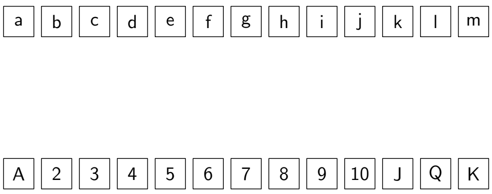
考えなくてはならないこと

どのようにマッチングを使うのか？

$\rightsquigarrow$ グラフを使って，問題をモデル化する

トランプ・マジック (?) のからくり：二部グラフの構成 (1)

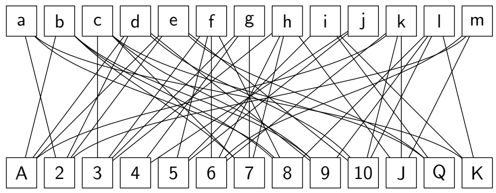
13 個のグループを表す頂点 (a から m まで)



13 個のカードのランクを表す頂点 (A から K まで)

トランプ・マジック (?) のからくり：二部グラフの構成 (2)

各グループとカードのランクの組に対して，

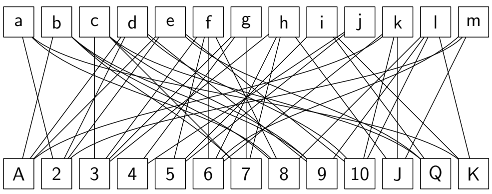


そのグループがそのランクのカードを含んでいれば辺を引く
そうでないときは辺を引かない

- A = グループに対応する頂点の集合
- B = カードのランクに対応する頂点の集合

トランプ・マジック (?) のからくり：Hall の結婚定理

Hall の結婚定理を使いたい

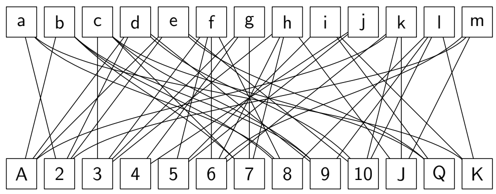


Hall の結婚定理

A の頂点をすべて飽和するマッチングを G が持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$

トランプ・マジック (?) のからくり：条件の確認

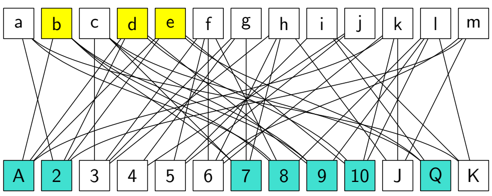
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S はグループの集合に対応
- $N_G(S)$ は S に属するグループに含まれるカードのランクに対応

トランプ・マジック (?) のからくり：条件の確認 (続き)

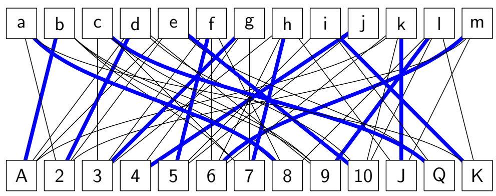
任意の $S \subseteq A$ を考える



- S に属するグループに含まれるカードの数は $4|S|$
- $N_G(S)$ に対応するランクのカードの数は $4|N_G(S)|$
- 背理法：$|S| > |N_G(S)|$ だと仮定すると，
  $|S|$ 個のグループを $N_G(S)$ に対応するランクのカードだけで作れない
- よって，$|S| \leq |N_G(S)|$ でないといけない

トランプ・マジック (?) のからくり：条件の確認 (続き)

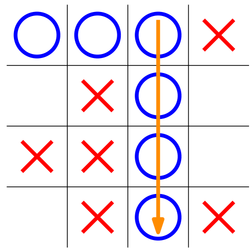
つまり，Hall の結婚定理にある条件が必ず成り立つ．



- つまり，A を飽和するマッチングが存在
- そこから，各グループでどのカードを選べばよいかが分かる $\square$

目次

四目並べ

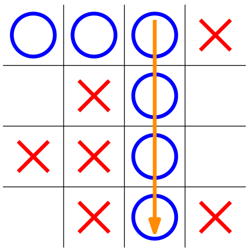


「斜め」は考えないとする

四目並べで後手は負けない

命題：四目並べの必勝戦略

後手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)



証明：Hall の結婚定理を使う

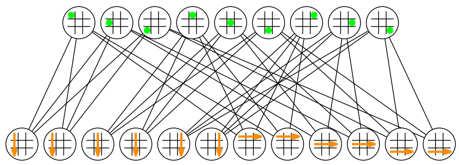
四目並べで後手は負けない：二部グラフ G の構成

2 種類の頂点

- マス頂点：盤面の各マスに対応
- 列頂点：盤面の各列 (横と縦) に対応，各列に対して 2 つずつ

マス頂点と列頂点の間に辺を引くのは

- 対応するマスが対応する列に含まれるとき

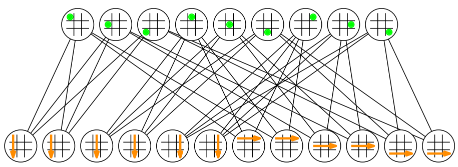


三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：二部グラフ G の性質

2 種類の頂点

- マス頂点
  - 総数 $= 16$
  - 次数 $= 4$ ($\because$ 各マスは 2 つの列に含まれるから)
- 列頂点
  - 総数 $= 8 \times 2 = 16$
  - 次数 $= 4$ ($\because$ 各列はマスを 4 つ含むから)



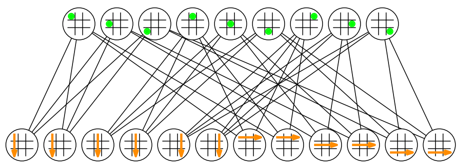
三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (1)

まず示すこと

このグラフ G には，完全マッチングが存在する

Hall の定理を使って証明する



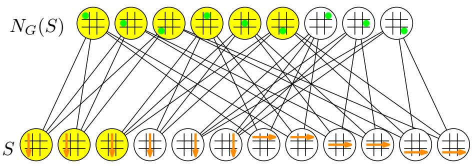
三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (2)

列頂点を任意にいくつか選んで，S という頂点集合を作る

- 示したいこと：$|S| \leq |N_G(S)|$
- S と $N_G(S)$ の間の隣接関係で，数え上げを行う

$N_G(S)$



S

三目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (3)

$$
\begin{array}{cc|ccccc|l}
 & & & & N_G(S) & & & \\
 & & v_1 & v_2 & & & v_h & \\
\hline
 & u_1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & = 4 \\
S & u_2 & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
 & & 1 & & 1 & 1 & 1 & = 4 \\
 & u_k & 1 & 1 & 1 & 1 & & = 4 \\
\hline
 & & \leq 4 & \leq 4 & \leq 4 & \leq 4 & \leq 4 &
\end{array}
$$

$u \in S$ と $v \in N_G(S)$ が隣接するなら「1」
そうでないときは「0」

- 各 $u \in S$ に対応する行の成分和 $= \deg_G(u) = 4$
- 各 $v \in N_G(S)$ に対応する列の成分和 $\leq \deg_G(v) = 4$

- $\therefore 4|S| =$ この行列の成分和 $\leq 4|N_G(S)|$
- $\therefore |S| \leq |N_G(S)|$

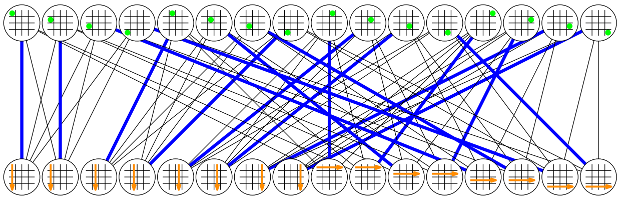
四目並べで後手は負けない：Hall の定理の適用 (4)

今示したこと

このグラフ G には，完全マッチングが存在する

そのようなマッチング M を考える

- 1 つの列に対応する列頂点は 2 つ存在し，
  M を通して，2 つのマス頂点と結ばれている



四目並べのときの例

四目並べで後手は負けない：ペアの作成

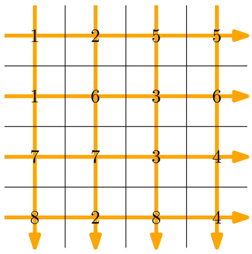
- 1 つの列に対応する列頂点は 2 つ存在し，
  M を通して，2 つのマス頂点と結ばれている
- その 2 つのマスに同じ記号を書いておく

1	2	5	5
1	6	3	6
7	7	3	4
8	2	8	4

四目並べで後手は負けない：ペアを用いた戦略

後手の戦略

- 先手の取ったマスに書かれた記号と同じ記号のマスを取る
- 各列には同じ記号が必ず 2 つあるので，先手は勝てない □



四目並べ：まとめ

四目並べについて

証明したこと

後手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)

演習問題

先手は必ず引き分けに持ち込める (負けない)

直感：先手は後手よりも有利

つまり (結論)

四目並べは，引き分けで終わる

d 次元 n 目並べ：未解決問題

知られていること (演習問題)

「斜めもある四目並べ」は，引き分けで終わる

知られていること

「斜めもある n 目並べ」は，引き分けで終わる (ただし，$n \geq 3$)

知られていること：3 次元

「斜めもある 3 次元 3 目並べ」は，先手が勝つ

知られていること：3 次元 (Patashnik '80)

「斜めもある 3 次元 4 目並べ」は，先手が勝つ

未解決問題：3 次元

「斜めもある 3 次元 5 目並べ」は，引き分けで終わるか？

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 最大流最小カット定理を用いて，二部グラフにおける，
  最大マッチングと最小頂点被覆の強双対性を証明できる
- 二部グラフにおいて，片側を飽和するマッチングが存在するための
  必要十分条件 (Hall の結婚定理) を証明できる
- Hall の結婚定理を用いて，様々な問題を解決できる
  - ドミノ・タイリング
  - トランプ・マジック（？）
  - 四目並べ