

グラフとネットワーク 第4回

マッチング：数理解

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021年5月7日

最終更新：2021年4月28日 14:25

スケジュール 前半 (予定)

- 0 ガイダンス (4/9)
- 1 グラフの定義と次数：数理解 (4/16)
- 2 道と閉路：数理解 (4/23)
- 3 木：数理解 (4/30)
- 4 マッチング：数理解 (5/7)
- 5 マッチング：モデル化 (5/14)
- 6 最大流：数理解 (5/21)
- 7 最大流：モデル化 (1) 割当 (5/28)

注意：予定の変更もありうる

グラフにおけるマッチング

目次

- 1 グラフにおけるマッチング
- 2 最大マッチングと増加道
- 3 最大マッチングと最小頂点被覆
- 4 今日のまとめ

グラフにおけるマッチング

グラフにおけるすべてのマッチング

このグラフのマッチングをすべて挙げると



- ▶ \emptyset
- ▶ $\{\{a, b\}\}$
- ▶ $\{\{a, c\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}\}$
- ▶ $\{\{b, c\}\}$
- ▶ $\{\{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- ▶ $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

概要

主題

離散最適化の入門として、次を概説する

- ▶ グラフとネットワークを用いた**数理解モデル化**
- ▶ **アルゴリズム**的解法の背後にある数理解

キャッチフレーズ：「本当の離散数理解がここから始まる」

達成目標

以下の4項目をすべて達成すること

- 1 グラフやネットワークに関する**用語**を正しく使うことができる
- 2 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し、**数理解モデル**を構築できる
- 3 アルゴリズム的解法の背後にある数理解、特に、**最小最大定理**の重要性を説明でき、それを用いて最適性の**証明**ができる
- 4 グラフとネットワークに関する簡単な数理解的事実を**証明**できる

概要

今日の目標

「マッチング」を理解する

- ▶ マッチングの定義を理解する
- ▶ 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- ▶ 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- ▶ 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

重要な概念

- ▶ 最適性の保証 (弱双対性) \rightsquigarrow **最適化の基礎**

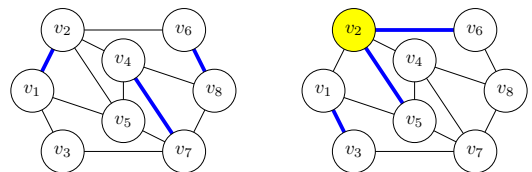
グラフにおけるマッチング

グラフにおけるマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：マッチングとは？

G の **マッチング** とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で、
 M のどの2辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は マッチングである
 $\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は マッチングではない

マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を **飽和** する

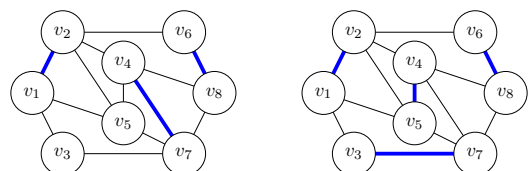
グラフにおけるマッチング

最大マッチング

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：最大マッチングとは？

G の **最大マッチング** とは G のマッチング $M \subseteq E$ で、
 G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない

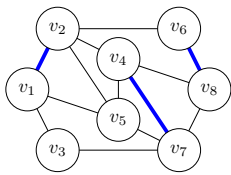
最大マッチングである

極大マッチング

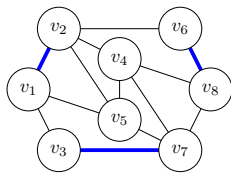
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：極大マッチングとは？

G の **極大マッチング** とは G のマッチング $M \subseteq E$ で、
任意の辺 $e \in E - M$ に対して $M \cup \{e\}$ が G のマッチングではないもの



極大マッチングである



極大マッチングではない

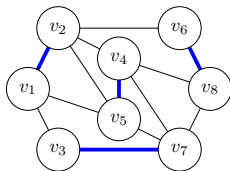
完全マッチングの辺数

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：完全マッチングの辺数は？

$M \subseteq E$ が G の完全マッチング $\Rightarrow |V| = 2|M|$

証明：演習問題 (ヒント：数え上げ論法)



$|V| = 8, |M| = 4$

最大マッチングと極大マッチングの関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：最大マッチングは極大マッチングである

$M \subseteq E$ が G の最大マッチング $\Rightarrow M$ は G の極大マッチング

証明 (背理法による) : M を G の最大マッチングとする

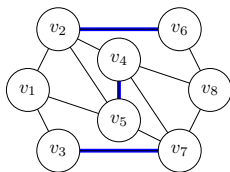
- ▶ M が G の極大マッチングではないと仮定する
- ▶ 極大マッチングの定義より、ある $e \in E - M$ が存在して、 $M \cup \{e\}$ は G のマッチング
- ▶ $|M \cup \{e\}| = |M| + 1 > |M|$
- ▶ これは M が最大マッチングであることに矛盾 □

標語的なまとめ

M が完全マッチング $\Rightarrow M$ が最大マッチング $\Rightarrow M$ が極大マッチング

最大マッチングをどのように見つければよい？

最大マッチングが見つからなかった



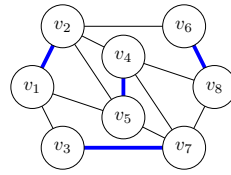
辺を 1 つずつ追加していくような方法では、
極大マッチングを見つけることはできるが、
最大マッチングを見つけれられるとは限らない

完全マッチング

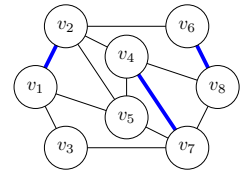
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：完全マッチングとは？

G の **完全マッチング** とは G のマッチング $M \subseteq E$ で、
 G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの



完全マッチングである



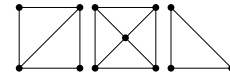
完全マッチングではない

完全マッチングと最大マッチングの関係

- ▶ 完全マッチングを持たないグラフもある
- ▶ 例えば、頂点数が奇数のグラフ



- ▶ 例えば、頂点数が奇数の連結成分を持つグラフ



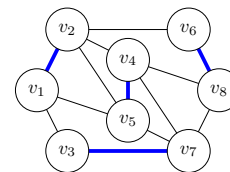
- ▶ 頂点数が偶数である連結グラフでもそのようなものがある (演習問題)
- ▶ 完全マッチングを持つグラフにおいて、完全マッチングは最大マッチングである (演習問題)

目次

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ

最大性の確認法？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



格言

発見法の前に確認法

「 $P \neq NP$ 問題」と関係 \rightsquigarrow 『計算理論』

格言 (再掲)

発見法の前に確認法

「 $P \neq NP$ 問題」と関係 \rightsquigarrow 『計算理論』

なぜ?

- ▶ 確認は発見より難しくない
- ▶ 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

ここからの内容: 最大性の確認法

2つ紹介する

- 1 増加道を用いる方法
- 2 頂点被覆を用いる方法

2つとも重要

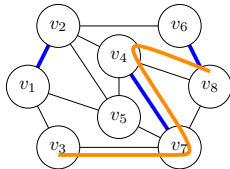
増加道

無向グラフ $G = (V, E)$, マッチング $M \subseteq E$

定義: 増加道とは?

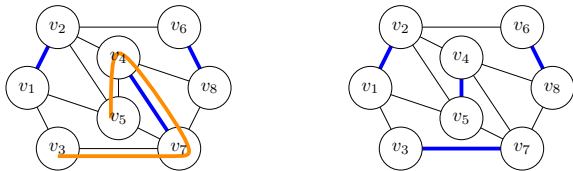
M に関する **増加道** とは, M に関する交互道 v_1, \dots, v_k で ($k \geq 1$), v_1 と v_k が M の辺と接続しないもの

増加道を増大, 増加路, 増大路と呼ぶこともある



v_3, v_7, v_4, v_8 は青のマッチングに関する増加道ではない

増加道に沿ってマッチングを大きくする



辺数3のマッチング \rightsquigarrow 増加道に沿って大きくする \rightsquigarrow 辺数4のマッチング

つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow M$ は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow M$ に関する増加道が存在しない

最大マッチングと増加道

無向グラフ $G = (V, E)$, マッチング $M \subseteq E$

最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow M$ に関する増加道が存在しない

「 \Rightarrow 」の証明: 演習問題 (前ページのスライドがヒント)

「 \Leftarrow 」の証明: 対偶を証明する

- ▶ M が G の最大マッチングではないと仮定
- ▶ M' を G の最大マッチングとする
- ▶ つまり, $|M'| > |M|$
- ▶ \leftarrow ここを今から埋めていく
- ▶ $\therefore M$ に関する増加道が存在する □

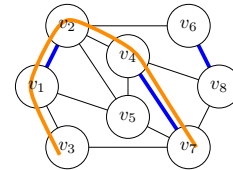
交互道

無向グラフ $G = (V, E)$, マッチング $M \subseteq E$

定義: 交互道とは?

M に関する **交互道** とは, G における道 v_1, \dots, v_k で ($k \geq 1$), M の辺と $E - M$ の辺が交互に現れるもの

交互道を交互路と呼ぶこともある



v_3, v_1, v_2, v_4, v_7 は青のマッチングに関する交互道である

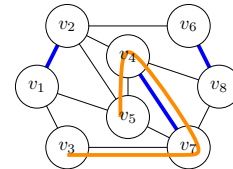
増加道

無向グラフ $G = (V, E)$, マッチング $M \subseteq E$

定義: 増加道とは?

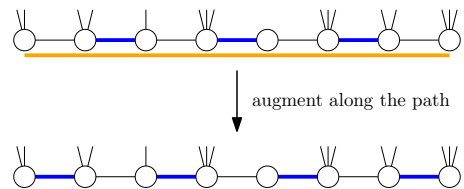
M に関する **増加道** とは, M に関する交互道 v_1, \dots, v_k で ($k \geq 1$), v_1 と v_k が M の辺と接続しないもの

増加道を増大, 増加路, 増大路と呼ぶこともある



v_3, v_7, v_4, v_5 は青のマッチングに関する増加道である

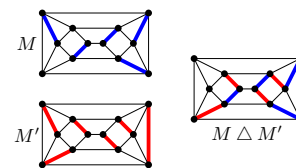
増加道に沿ってマッチングを大きくする: 一般的な説明



増加させた後もマッチングになっている

最大マッチングと増加道: 証明の着想

M と M' の対称差 $M \Delta M'$ を考える



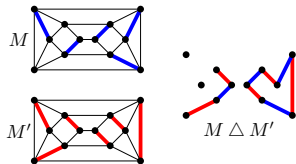
定義: 集合の対称差とは?

$$X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

格言

対称差で2つの集合の違いが見える

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



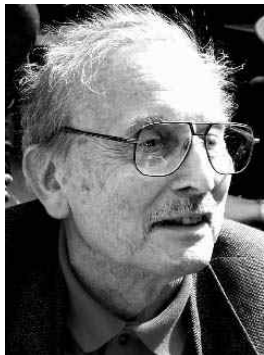
グラフ $(V, M \triangle M')$ の各頂点の次数は 0 か 1 か 2

このグラフ $(V, M \triangle M')$ の連結成分は何か？

- ▶ 次数 0 の頂点を持つ連結成分 \rightsquigarrow 孤立点
- ▶ 次数 1 の頂点を持つ連結成分 \rightsquigarrow 道
- ▶ 次数 2 の頂点だけから成る連結成分 \rightsquigarrow 閉路
 - ▶ M と M' の辺が交互に現れるので、その長さは偶数

「 \Leftarrow 」の証明：対偶を証明する

- ▶ M が G の最大マッチングではないと仮定
- ▶ M' を G の最大マッチングとする
- ▶ つまり、 $|M'| > |M|$
- ▶ グラフ $(V, M \triangle M')$ を考える
 - ▶ 各頂点の次数は 2 以下であり、 M の辺と M' の辺が交互に現れる
 - ▶ \therefore 各連結成分は孤立点か、道か、長さ偶数の閉路である
 - ▶ 長さ偶数の閉路において、 M の辺の数 = M' の辺の数
 - ▶ $|M'| > |M|$ なので、ある道 P において M の辺の数 $<$ M' の辺の数
 - ▶ P の端点は M の辺に接続していない
- ▶ $\therefore P$ は G において M に関する増加道である □



<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Berge/>

格言 (再掲)

発見法の前に確認法

「 $P \neq NP$ 問題」と関係 \rightsquigarrow 『計算理論』

なぜ？

- ▶ 確認は発見より難しくない
- ▶ 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

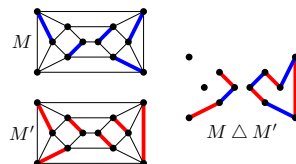
ここからの内容：最大性の確認法

2 つ紹介する

- 1 増加道を用いる方法 (済)
- 2 頂点被覆を用いる方法

2 つとも重要

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



グラフ $(V, M \triangle M')$ の連結成分は孤立点か、道か、長さ偶数の閉路である

このグラフ $(V, M \triangle M')$ 中の状況を考える

- ▶ 長さ偶数の閉路において、 M の辺の数 = M' の辺の数
- ▶ $|M'| > |M|$ なので、ある道において、 M の辺の数 $<$ M' の辺の数

この道は M に関する増加道!!!

増加道で「山登り」ができる

増加道に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- ▶ 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- ▶ 出力： G の最大マッチング M

- 1 $M := \emptyset$ とする
- 2 while M に関する増加道 P が存在する do
 - 1 P に沿って M を大きくする
- 3 M を出力

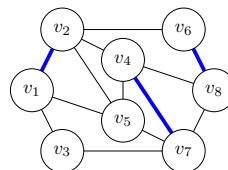
先ほどの定理 (Berge) によって、このアルゴリズムは必ず停止し、最大マッチングを出力することが分かる

格言

アルゴリズムは数理構造が導く

- 1 グラフにおけるマッチング
- 2 最大マッチングと増加道
- 3 最大マッチングと最小頂点被覆
- 4 今日のまとめ

このマッチングが最大マッチングでないことを確認するにはどうしたらよいか？



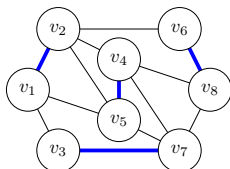
増加道を見つければよい

別の言い方

1 つの増加道がマッチングの非最大性に対する証拠になっている

最大性の証拠？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するにはどうしたらよいか？



増加道がないことを言えばよいが、どのようにして言えばよいのか？

別の言い方

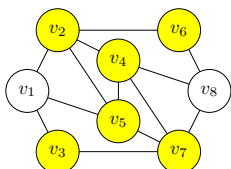
マッチングの最大性に対する証拠はあるのか？

最小頂点被覆

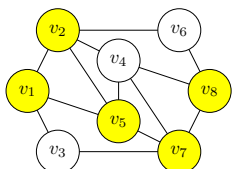
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：最小頂点被覆とは？

G の **最小頂点被覆** とは頂点被覆 $C \subseteq V$ で、 G の任意の頂点被覆 C' に対して $|C| \leq |C'|$ を満たすもの



{v2, v3, v4, v5, v6, v7} は最小頂点被覆ではない



{v1, v2, v5, v7, v8} は最小頂点被覆である

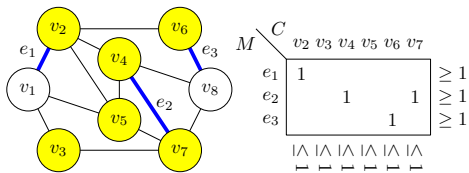
マッチングと頂点被覆の関係：証明の着想

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

証明の着想：数え上げ論法による



この行列における成分の総和を 2 通りの計算で考えてみる

マッチングと頂点被覆の関係：帰結

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

最大マッチングと最小頂点被覆の関係 (弱双対性)

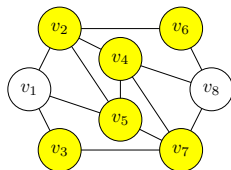
M が G の最大マッチング
 C が G の最小頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

頂点被覆

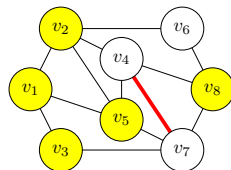
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：頂点被覆とは？

G の **頂点被覆** とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で、 G のどの辺もある C の頂点に接続しているもの



{v2, v3, v4, v5, v6, v7} は頂点被覆である



{v1, v2, v3, v5, v8} は頂点被覆ではない

頂点被覆の頂点は、それに接続する辺を **覆う** (被覆する)

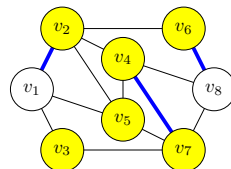
マッチングと頂点被覆の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の関係 (重要)

M が G のマッチング
 C が G の頂点被覆 $\Rightarrow |M| \leq |C|$

例： $|M| = 3, |C| = 6$



マッチングと頂点被覆の関係：証明

証明：行列 $X \in \mathbb{R}^{C \times M}$ を次のように定義する

$$v \in C, e \in M \text{ に対して, } X_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるとき}) \\ 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \end{cases}$$

▶ M はマッチングなので、 C の各頂点に接続する M の辺の数は 1 以下

$$\therefore \sum_{v \in C} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{v \in C} \left(\sum_{e \in M} X_{v,e} \right) \leq \sum_{v \in C} 1 = |C|$$

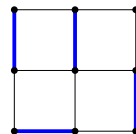
▶ C は頂点被覆なので、 M の各辺に接続する C の頂点の数は 1 以上

$$\therefore \sum_{v \in C} \sum_{e \in M} X_{v,e} = \sum_{e \in M} \left(\sum_{v \in C} X_{v,e} \right) \geq \sum_{e \in M} 1 = |M|$$

▶ $\therefore |M| \leq \sum_{v \in C} \sum_{e \in M} X_{v,e} \leq |C|$ □

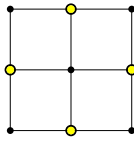
頂点被覆の重要性

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



最大マッチングの辺数 ≥ 4

次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？



これは頂点被覆なので、

最大マッチングの辺数 ≤ 4

▶ したがって、最大マッチングの辺数 = 4 である!!!

次の 2 つを同時に行う

下界

辺数 k のマッチングを見つける

▶ このとき、
最大マッチングの辺数 $\geq k$

上界

頂点数 k の頂点被覆を見つける

▶ このとき、
最大マッチングの辺数 $\leq k$

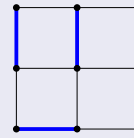
よって、この 2 つができれば

最大マッチングの辺数 = k

- ① グラフにおけるマッチング
- ② 最大マッチングと増加道
- ③ 最大マッチングと最小頂点被覆
- ④ 今日のまとめ

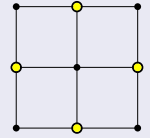
次のグラフの最大マッチングの辺数は何か？

下界



最大マッチングの辺数 ≥ 4

上界



最大マッチングの辺数 ≤ 4

したがって、最大マッチングの辺数 = 4

格言

頂点被覆を見ることで、マッチングの最大性が **保証** される

頂点被覆により、最適値の「狭み打ち」ができる

頂点被覆に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- ▶ 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- ▶ 出力： G の最大マッチング M と最小頂点被覆 C

- 1 $M := \emptyset, C := V$ とする
- 2 while $|M| < |C|$ do
 - ① M を大きくするか、 C を小さくする
- 3 M と C を出力

先ほどの考察より、このアルゴリズムが停止するならば、必ず最大マッチングと最小頂点被覆を出力することが分かる

問題点

停止しないかもしれない

今日の目標

「マッチング」を理解する

- ▶ マッチングの定義を理解する
- ▶ 最大マッチングと極大マッチングの違いを理解する
- ▶ 最大マッチングと増加道の関係を理解する
- ▶ 最大マッチングと最小頂点被覆の関係を理解する

重要な概念

- ▶ 最適性の保証 (弱双対性) \rightsquigarrow **最適化の基礎**

上の弱双対性は、線形計画法の弱双対性と密接に関係 \rightsquigarrow 『数理計画法』

次回

マッチングによるモデル化

- ▶ XML のパターン・マッチング
- ▶ ドナー交換腎移植