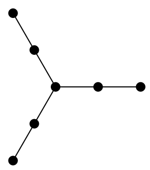
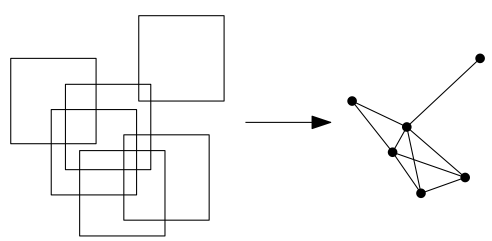
グラフとネットワーク (12) 2021 年 7 月 2 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2021 年 7 月 9 日 12:59

授業内問題 12.1 次の図にあるグラフが区間グラフであるかどうか，理由も付けて答えよ．

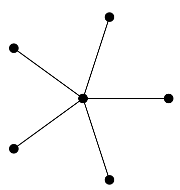


授業内問題 12.2 無向グラフ $G=(V,E)$ が**単位正方形グラフ**であることを次のように定義する[1]．グラフ G の各頂点 $v \in V$ は平面上の単位正方形 (各辺の長さが 1 である正方形) で，その辺が x 軸か y 軸に平行であるものに対応する．そして，G の 2 頂点 $u, v \in V$ が隣接している，すなわち，$\{u,v\} \in E$ であるのは，u, v に対応する単位正方形が交わるとき，そのときに限る．次の図は単位正方形グラフの例である．



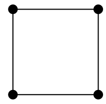
以下の問いに答えよ．

1. 次の図にあるグラフは単位正方形グラフではない．なぜ単位正方形グラフではないのか，説明せよ．



2. 任意の単位正方形グラフ $G=(V,E)$ と V 上の任意の全順序 σ を考える．このとき，σ に従う貪欲彩色の用いる色数が必ず $4\chi(G)-3$ 以下となることを証明せよ．

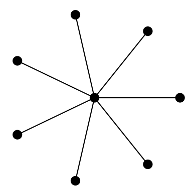
復習問題 12.3 次の図にあるグラフは区間グラフではない．なぜ区間グラフではないのか，説明せよ．



[1]ここに挙げるは「単位正方形グラフ」の定義は一般的なものではないかもしれない．

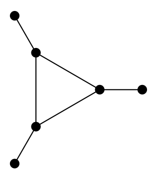
復習問題 12.4 任意の区間グラフ G に対して，あるクリーク $C \subseteq V$ が存在して，$\chi(G)=|C|$ となることを証明せよ．

復習問題 12.5 次の図にあるグラフは単位円グラフではない．なぜ単位円グラフではないのか，説明せよ．

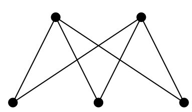


復習問題 12.6 任意の単位円グラフ $G=(V,E)$ と V 上の任意の全順序 σ を考える．このとき，σ に従う貪欲彩色の用いる色数が必ず $6\chi(G)-5$ 以下となることを証明せよ．

追加問題 12.7 次の図にあるグラフが区間グラフであるかどうか，理由も付けて答えよ．



追加問題 12.8 次の図にあるグラフが単位円グラフであるかどうか，理由も付けて答えよ．



追加問題 12.9 単位円グラフ $G=(V,E)$ で，$\chi(G)$ と $\omega(G)$ が異なる値となるものを構成せよ．なぜそうなるのか (構成したグラフが単位円グラフであること，$\chi(G)$ と $\omega(G)$ の値が異なること) も説明せよ．(注意：$\omega(G)$ は G のクリーク数 (クリークの頂点数の最大値) である．)

追加問題 (発展) 12.10 単位円グラフ $G=(V,E)$ に対して，V 上の全順序 σ を次のように定める．

> 頂点に対応する単位円の左端を見て，それを左から順に並べる．(左端の x 座標が同じ単位円は複数存在しない，と仮定する (仮定できる)．)

この演習問題の目標は，σ に従う貪欲彩色の費やす色数が $3\chi(G)-2$ 以下になる，ということを証明することである．以下の問いに答えよ．

1. (単位円グラフであるとは限らない) 任意の無向グラフ $G=(V,E)$ を考える．ある自然数 k に対して，グラフ G が「G の任意の部分グラフにおいて，次数 k 以下の頂点が存在する」という性質を満たすとする．このとき，V 上のある全順序に従って貪欲彩色を行うことで，$\chi(G) \leq k+1$ が成り立つことを証明せよ．その際に，$k+1$ 色 (あるいはそれよりも少ない色数) しか使わない貪欲彩色を与えるような全順序を実際に構成してみよ．

2. 単位円グラフ $G=(V,E)$ に対して，前問における k として $3\chi(G)-3$ が選べることを証明せよ．つまり，任意の単位円グラフ $G=(V,E)$ が「G の任意の部分グラフにおいて，次数 $3\chi(G)-3$ 以下の頂点が存在する」という性質を満たすことを証明せよ．(ヒント：σ の構成法に着目してみよ．)

3. 以上の考察から,「単位円グラフにおいて，σ に従う貪欲彩色の費やす色数が $3\chi(G)-2$ 以下になる」ということを証明せよ．