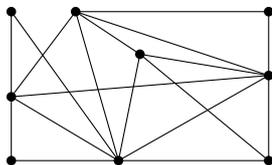


提出締切：2021年7月2日 12:59

授業内問題 11.1 次の無向グラフにおいて、色数最小の彩色を与えよ。その彩色の色数が最小であることも証明せよ。

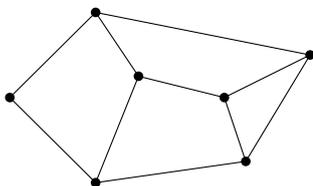


復習問題 11.2 無向グラフ G が2彩色可能であるための必要十分条件は、 G が二部グラフであることである。これを証明せよ。

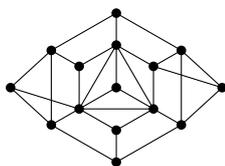
復習問題 11.3 任意の無向グラフ G に対して、その染色数 $\chi(G)$ と最大次数 $\Delta(G)$ が $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ という関係を満たすことを証明せよ。

復習問題 11.4 任意の無向グラフ G に対して、その染色数 $\chi(G)$ と任意のクリーク $C \subseteq V$ が $\chi(G) \geq |C|$ という関係を満たすことを証明せよ。

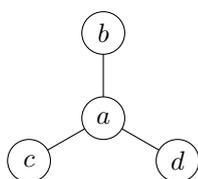
復習問題 11.5 次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ。その彩色の色数が最小であることも証明せよ。



復習問題 11.6 次の無向グラフにおける色数最小の彩色を与えよ。その彩色の色数が最小であることも証明せよ。



補足問題 11.7 次の図にある無向グラフ G がどの無向グラフの線グラフではない(つまり、 $G \simeq L(H)$ となる無向グラフ H が存在しない) ということを証明せよ。



補足問題 11.8 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、頂点集合 V 上のある全順序が存在して、その全順序に従って貪欲彩色を行うと、色数最小の彩色が得られることを証明せよ。(ヒント:直感を得るために、まず G が二部グラフの場合を考えるとよいかもしいない。)

補足問題 11.9 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ において、任意の最大マッチング M と任意の最小頂点被覆 C を考える。このとき、 $|C| \leq 2|M|$ が成り立つことを証明せよ。(ヒント: M の要素である辺の端点として現れる頂点をすべて集めて、頂点部分集合 S を作成してみよ。このとき、 S について何が言えるか?)

補足問題 11.10 無向グラフ $G_k = (V_k, E_k)$ に対して、次のようにグラフ $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ を構成する。ただし、 $V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ であるとする。

$$V_{k+1} = V_k \cup \{u_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{s\},$$

$$E_{k+1} = E_k \cup \{\{v_i, u_j\} \mid \{v_i, v_j\} \in E_k\}$$

$$\cup \{\{s, u_i\} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

以下の問いに答えよ。

- G_k に頂点数3のクリークが存在しないとき、 G_{k+1} にも頂点数3のクリークが存在しないことを証明せよ。
- G_k の染色数が k であるとき、 G_{k+1} の染色数が $k+1$ であることを証明せよ。(ヒント: $\chi(G_{k+1}) \geq k+1$ を証明するためには、クリークを用いる方法が使えないので、工夫が必要となる。)

追加問題 11.11 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と G の任意の独立集合 $I \subseteq V$ を考える。このとき、 I の補集合 $V - I$ は G の頂点被覆であることを証明せよ。

追加問題 11.12 無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、その独立集合の頂点数の最大値を $\alpha(G)$ で表す。このとき、 $\alpha(G)\chi(G) \geq |V|$ が成り立つことを証明せよ。

追加問題 11.13 任意の自然数 $k \geq 2$ に対して、次の性質を持つ二部グラフ $G = (V, E)$ を構成せよ。

性質: G の最大次数は k であり、 V 上のある全順序 σ が存在して、それに従う貪欲彩色によって G の彩色として色数 $k+1$ のものが得られる。

(注意: k は2以上の任意の自然数であることに注意する。すなわち、 k によって G は変わる。)

追加問題 11.14 連結無向グラフ G の最大次数は 3 であり、最小次数は 2 であるとする。このとき、 G は 3 彩色可能であることを証明せよ。(注意： G は連結であることに注意。そうでないと、最大次数が 3 であり、最小次数が 2 であっても、3 彩色可能であるとは限らない。)