グラフとネットワーク (10) 2021 年 6 月 18 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2021 年 6 月 25 日 12:59

授業内問題 10.1 次の性質を満たす無向グラフ $G = (V, E)$ を構成せよ．

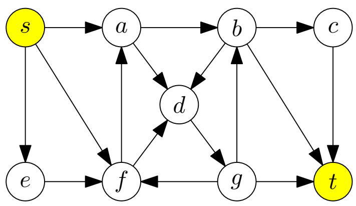
> 異なる 2 頂点 s, t が存在して，$\{s, t\} \notin E$, $\deg_G(s) = 8$, $\lambda_{s,t}(G) = 5$, $\kappa_{s,t}(G) = 2$.

(そのグラフにおいて，$\lambda_{s,t}(G) = 5$, $\kappa_{s,t}(G) = 2$ が成り立つことも明確に証明せよ．)

授業内問題 10.2 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の異なる 2 頂点 s, t を考える．

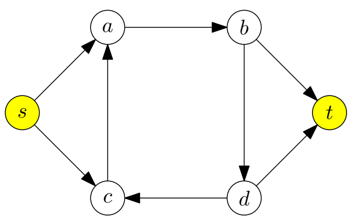
1. $\deg_G(s) \geq \lambda_{s,t}(G)$ を証明せよ．
2. $\{s, t\} \notin E$ であるとき，$\lambda_{s,t}(G) \geq \kappa_{s,t}(G)$ を証明せよ．(注意：$\{s, t\} \notin E$ という条件がどこで使われているか明記せよ．)

復習問題 10.3 次の有向グラフ G と頂点 s, t を考える．



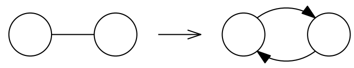
1. グラフ G の s, t 弧連結度を計算する問題を最小 s, t カット問題としてモデル化せよ．
2. グラフ G の s, t 弧連結度が何であるか，理由も添えて答えよ．

復習問題 10.4 次の有向グラフ G と頂点 s, t を考える．



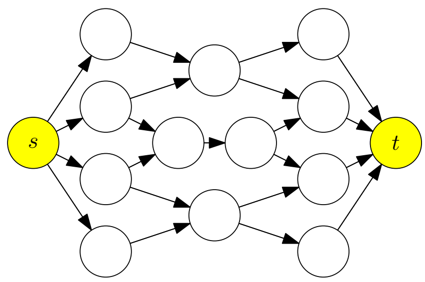
1. グラフ G の s, t 点連結度を計算する問題を最小 s, t カット問題としてモデル化せよ．
2. グラフ G の s, t 点連結度が何であるか，理由も添えて答えよ．

補足問題 10.5 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の異なる 2 頂点 $s, t \in V$ を考える．このとき，s から t へ至る k 個の道 $P_1, \ldots, P_k$ がどの辺も共有しないとする．そのような $P_1, \ldots, P_k$ が存在するような k の最大値と G の s, t 辺連結度が等しいことを証明せよ．(ヒント：有向グラフの弧連結度に関するメンガーの定理を利用せよ．次の図を参考にするとよいかもしれない．)



補足問題 10.6 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の異なる 2 頂点 $s, t \in V$ を考える．ただし，$\{s, t\} \notin E$ であるとする．このとき，s と t を端点とする k 個の道 $P_1, \ldots, P_k$ が s, t 以外のどの頂点も共有しないとする．そのような $P_1, \ldots, P_k$ が存在するような k の最大値と G の s, t 点連結度が等しいことを証明せよ．(ヒント：有向グラフの点連結度に関するメンガーの定理を利用せよ．)

追加問題 10.7 次の有向グラフと頂点 s, t を考える．



1. このグラフの s, t 弧連結度は何か？ その値になることを証明せよ．
2. このグラフの s, t 点連結度は何か？ その値になることを証明せよ．

追加問題 10.8 無向グラフ $G = (V, E)$ の異なる 2 頂点 s, t は $\{s, t\} \notin E$ を満たすとする．このとき，

$$|V| + \kappa_{s,t}(G) \geq \deg_G(s) + \deg_G(t) + 2$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 10.9 任意の 3 正則グラフ $G = (V, E)$ に対して，$\kappa(G) = \lambda(G)$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：無向グラフに対するメンガーの定理を利用してもよい．)