グラフとネットワーク (9) **2021 年 6 月 11 日**

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2021 年 6 月 18 日 12:59

授業内問題 9.1 Y 大学の Z 学科では次のような講義が開講される．講義の履修には，それが前提とする講義をすべて先に履修しなければならない．しかし，いくつかの講義は厄介で，それを履修して得られる知識・技術が，そのためのコストに比べて著しく小さいものがある[1]．それを考慮して，各講義の利得を算出したものを下の表にまとめた．同じ時間帯に開講される講義はないものとする．このとき，利得和を最大とするように履修計画を立てたい．

講義名	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
前提とする講義	なし	なし	なし	なし	A と B	C	B と C	D	F	G	G と H
利得	1	-1	2	1	-2	1	-1	-1	2	-1	2

(1) この問題を最小 s,t カット問題としてモデル化せよ．(ヒント：露天掘り問題を参考にせよ．)

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最小 s,t カットは何か？ また最大 s,t 流は何か？ 最小 s,t カットの容量と最大 s,t 流の値が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，利得和を最大とするような履修計画が何であるか，1 つ答えよ．

授業内問題 9.2 この問題の目標は，最密部分グラフ問題を露天掘り問題の考え方で解くことである．これによって講義で説明した手法 (Goldberg [1] の論文で紹介されている方法) が得られるわけではないが，その理解にはつながるかもしれない．

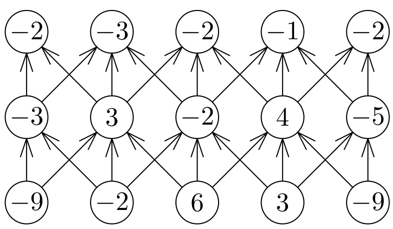
無向グラフ $G = (V,E)$ と正の有理数 g が与えられる．部分グラフ $G' = (V',E')$ の密度が g 以上であることは $|E'|/|V'| \geq g$ であることと書けるが，これは $|E'| - g|V'| \geq 0$ であることと書き直すことができる．これは，次のような形で，露天掘り問題と類似していることが分かる．

- これは $V \cup E$ の要素を集めて，総利益を最大にする問題であると見なせる．
- 集合 E の各要素の利益が 1 であり，集合 V の各要素の利益が $-g$ である．
- 辺 $\{u,v\} \in E$ を選び取るためには，$u \in V$ と $v \in V$ を選び取らなくてはならない．

このときに，部分グラフ $G' = (V',E')$ を選んだときの利益は $|E'| - g|V'|$ となる．

このアイディアに基づいて，最密部分グラフ問題，つまり，密度が g 以上の部分グラフが存在するか判定する問題を，露天掘り問題と同じように最小 s,t カット問題としてモデル化せよ．元の問題における密度 g 以上の部分グラフが，構成した問題の最小 s,t カットとどのように対応するのか述べ，その対応が正しいことを証明せよ．

復習問題 9.3 次のような有向グラフを考える．各頂点に付与されている数はその頂点の重みを表す．



考える問題は，次の条件を満たす頂点部分集合 X でその頂点重み和が最大のものを見つけることである．

頂点 x,y に対して，弧 (x,y) が存在し，$x \in X$ であるとき，$y \in X$ も成り立つ．

[1]本来，そのようなことがあってはならない．

以下の問いに答えよ．

(1) この問題を最小 s,t カット問題としてモデル化せよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最小 s,t カットは何か？ また，最大 s,t 流は何か？ 最大 s,t 流の値と最小 s,t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果を用いて，上の条件を持つ頂点部分集合の中で，頂点重み和が最大のものが何であるか，答えよ．

復習問題 9.4 無向グラフ $G=(V,E)$ の密度を $|E|/|V|$ と定義する．無向グラフ $G=(V,E)$ と正の有理数 g が与えられたとき，G の部分グラフで，その密度が g 以上であるものを見つけたい．以下，$n=|V|$，$m=|E|$ とする．

そのために，次の有向グラフ $G'=(V',A')$ を考える．

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{s,t\} \quad (\text{ただし，} s,t \notin V), \\ A' &= \{(u,v) \mid \{u,v\} \in E\} \cup \{(s,v) \mid v \in V\} \cup \{(u,t) \mid u \in V\}. \end{aligned}$$

そして，各弧 $(u,v) \in A'$ の容量 $c((u,v))$ を次のように設定する．

$$c((u,v)) = \begin{cases} 1 & (u,v \in V \text{ のとき}), \\ m & (u = s \text{ のとき}), \\ m + 2g - \deg_G(u) & (v = t \text{ のとき}). \end{cases}$$

グラフ G の頂点部分集合 $X \subseteq V$ (ただし，$X \neq \emptyset$) に対して，誘導部分グラフ $G[X]$ の密度が g 以上であるための必要十分条件は，G' の s,t カット $X \cup \{s\}$ の容量が mn 以下であることである．これを証明せよ．(ヒント：演習問題 9.5 の結果を用いても良い．)

補足問題 9.5 任意の無向グラフ $G=(V,E)$ と任意の頂点部分集合 $X \subseteq V$ に対して，

$$\sum_{u \in X} \deg_G(u) - \sum_{\substack{\{u,v\} \in E: \\ u \in X, v \notin X}} 1 = 2 \cdot |\{\{u,v\} \in E \mid u,v \in X\}|$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 (発展) 9.6 頂点数 n，弧数 m の有向グラフにおける最大流問題を $T(n,m)$ 時間で解くアルゴリズムを用いて，与えられた無向グラフ $G=(V,E)$ における最密部分グラフ (密度が最大である部分グラフ) を $O(T(|V|+2, 2|V|+2|E|) \log |V|)$ 時間で見つけるアルゴリズムを設計せよ．(ヒント：演習問題 9.4 の結果に二分探索を組み合わせて用いよ．まず，探索すべき候補の総数が $O(|V||E|)$ で抑えられることを示せ．)

追加問題 9.7 無向グラフ $G=(V,E)$ の各頂点 $v \in V$ に対して正有理数の重み $\alpha(v) \in \mathbb{Q}$ が与えられ，各辺 $e \in E$ に対しても正有理数の重み $\beta(e) \in \mathbb{Q}$ が与えられている．そのような重み付きグラフの密度を $\sum_{e \in E} \beta(e) / \sum_{v \in V} \alpha(v)$ で定義する．

それに加えて，密度保証 $g \in \mathbb{Q}$ が与えられたとき，無向グラフ G の部分グラフで (重み付きグラフとしての) 密度が g 以上であるものが存在するかどうか判定したい．この問題を最小 s,t カット問題としてモデル化せよ．元の問題における密度 g 以上の部分グラフが，構成した問題の最小 s,t カットとどのように対応するのか述べ，その対応が正しいことを証明せよ．(ヒント：問題 9.2 か問題 9.4 の考え方を参考にせよ．どちらを参考にしてもよいが，参考にした問題が異なると，得られる最小 s,t カット問題も異なるものになる (はずである)．)

参考文献

[1] A. V. Goldberg, Finding a Maximum Density Subgraph. Technical Report No. UCB/CSD-84-171, EECS Department, University of California, Berkeley, 1984.