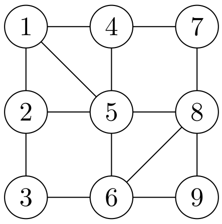
グラフとネットワーク (7) 2021 年 5 月 28 日

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2021 年 6 月 4 日 12:59

授業内問題 7.1 次の無向グラフ G を考える．各頂点に付与されている数はその頂点の番号 (名前) を表す．



各頂点 v に対して次のように非負整数 $m(v)$ が与えられたとき，v の入次数を $m(v)$ とするような G の向き付けが存在するか，判定したい．以下の問いに答えよ．

$$m(1) = 2, m(2) = 3, m(3) = 1, m(4) = 2, m(5) = 1, m(6) = 2, m(7) = 2, m(8) = 1, m(9) = 0.$$

(1) 条件を満たす向き付けが存在するか判定する問題を最大流問題としてモデル化せよ．そのとき，最大 s, t 流の値と上記の条件を満たす向き付けが存在することの関係を述べよ．

(2) 問 (2) で得られた問題に対する最大 s, t 流は何か？ また，最小 s, t カットは何か？ 最大 s, t 流の値と最小 s, t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果を用いて，条件を満たす向き付けが存在するか，判定せよ．

授業内問題 7.2 ある女子大学のある学科にて，新入生レクリエーションでバスケットボール大会を行うことになった．バスケットボールの 1 チームは 5 名で構成される．新入生は総勢 50 名いるので，チームを 10 個作りたい．

新入生の出身地は多様性に富んでいるので，その多様性を活かし，各チームにおいてメンバーの出身地ができる限り異なるようにしようと考えた．出身地別の新入生数は以下の表のとおりである．

出身地	東京都	神奈川県	千葉県	群馬県	静岡県	石川県	奈良県	北海道
新入生数	16	9	8	6	5	3	2	1

ここで，各チームが次の 2 条件を満たすように構成することを考える．

- 各チームが含む，東京都出身の新入生の数は多くても 2 名である．
- 東京都以外の都道府県について，各チームが含む新入生の数は多くても 1 名である．

以下の問いに答えよ．

(1) この問題を最大流問題としてモデル化せよ．最大 s, t 流の値と条件を満たすようにチームを作れるかどうかの判断が，どのように関係するのか，述べよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大 s, t 流は何か？ また，最小 s, t カットは何か？ 最大 s, t 流の値と最小 s, t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，条件を満たすようにチームを作れるかどうか答えよ．チームが作れる場合，どのように作れば良いのか答えよ．

復習問題 7.3 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい．遭難者は 8 人おり，オアシスは 3 か所ある．遭難者は携帯電話によって決められた場所まで歩くよう誘導できる．各オアシスに対して，各遭難者までの距離と救護可能人数は次の通りである．

距離	遭難者								救護可能人数
(km)	1	2	3	4	5	6	7	8	(人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

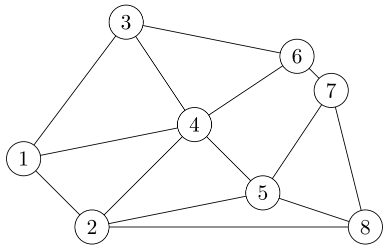
このとき，どの遭難者の歩く距離も 3 km 未満であるとして，全員救護できるか，判定したい．

(1) この問題を最大流問題としてモデル化せよ．最大 s,t 流の値と全員救護できるかどうかの判断が，どのように関係するのか，述べよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大 s,t 流は何か？ また，最小 s,t カットは何か？ 最大 s,t 流の値と最小 s,t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，全員救護できるかできないか答えよ．また，全員救護できないとき，最大何人まで救護できるか答えよ．

復習問題 7.4 次の無向グラフ G を考える．各頂点に付与されている数はその頂点の番号 (名前) を表す．各頂点 v に対して非負整数 $m(v)$ が与えられているとき，v の入次数を $m(v)$ とするような向き付けが存在するか，判定したい．



以下の問いに答えよ．

(1) 次のように $m(v)$ が与えられたとき，各頂点の入次数を $m(v)$ とするような G の向き付けが存在することを示せ．

$$m(1) = 1, m(2) = 2, m(3) = 2, m(4) = 2, m(5) = 3, m(6) = 1, m(7) = 2, m(8) = 1.$$

(2) 次のように $m(v)$ が与えられたとき，各頂点の入次数を $m(v)$ とするような G の向き付けが存在しないことを以下の手順に従って示せ．

$$m(1) = 2, m(2) = 0, m(3) = 2, m(4) = 3, m(5) = 1, m(6) = 2, m(7) = 3, m(8) = 1.$$

(2-1) 条件を満たす向き付けが存在するか判定する問題を最大流問題としてモデル化せよ．そのとき，最大 s,t 流の値と上記の条件を満たす向き付けが存在することの関係を述べよ．

(2-2) 問 (2-1) で得られた問題に対する最大 s,t 流は何か？ また，最小 s,t カットは何か？ 最大 s,t 流の値と最小 s,t カットの容量が一致することを確かめよ．

(2-3) 上問の結果を用いて，条件を満たす向き付けが存在しないことを結論として導け．

復習問題 7.5 次の表は，Major League Baseball アメリカンリーグ東地区の 1996 年 8 月 30 日の時点での対戦成績である[1]．ここで，NYY はニューヨーク・ヤンキース，BAL はボルティモア・オリオールズ，BOS はボストン・レッドソックス，TOR はトロント・ブルージェイズ，DET はデトロイト・タイガースをそれぞれ表す．

チーム名	勝数	敗数	残り試合数	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

[1] https://s2.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

最終的に勝数が最も多いチームが優勝する．この状況で，デトロイト・タイガース (DET) が地区優勝可能かどうか判定したい．

(1) デトロイト・タイガースの優勝可能性判定問題を最大流問題としてモデル化せよ．最大 s,t 流の値とデトロイト・タイガースの優勝可能性が，どのように関係するのか，述べよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大 s,t 流は何か？ また最小 s,t カットは何か？ 最大 s,t 流の値と最小 s,t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，デトロイト・タイガースにまだ優勝の可能性があるかどうか，答えよ．

補足問題 7.6 無向グラフ $G=(V,E)$ と各頂点に非負整数 $m(v)$ が与えられるとき，v の入次数を $m(v)$ とするような G の向き付けが存在するとき，

$$|E| = \sum_{v \in V} m(v)$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 7.7 問題 7.3 における状況で，どの遭難者の歩く距離も 2 km 未満であるとして，全員救護できるか，考える．

(1) この問題を最大流問題としてモデル化せよ．最大 s,t 流の値と全員救護できるかどうかの判断が，どのように関係するのか，述べよ．

(2) その問題における最大 s,t 流は何か？ また最小 s,t カットは何か？ 最大 s,t 流の値と最小 s,t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，全員救護できるかできないか答えよ．また全員救護できないとき，最大何人まで救護できるか答えよ．

追加問題 7.8 問題 7.5 に書いてあるリーグ戦の途中経過を考える．最終的に勝数が最も多いチームが優勝する．この状況で，トロント・ブルージェイズ (TOR) にまだ優勝の可能性があるかどうか判定したい．

(1) TOR の優勝可能性判定問題を最大流問題としてモデル化せよ．最大 s,t 流の値と TOR の優勝可能性が，どのように関係するのか，述べよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大 s,t 流は何か？また最小 s,t カットは何か？ 最大 s,t 流の値と最小カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，TOR にまだ優勝の可能性があるかどうか，答えよ．

追加問題 7.9 次のような架空のリーグ戦における途中経過を考える．

チーム名	勝数	残り試合数	A	B	C	D
A	83	8	–	1	6	1
B	79	4	1	–	0	3
C	78	7	6	0	–	1
D	76	5	1	3	1	–

最終的に勝数が最も多いチームが優勝する．この状況で，チーム B にまだ優勝の可能性があるかどうか判定したい．

(1) チーム B の優勝可能性判定問題を最大流問題としてモデル化せよ．最大 s,t 流の値とチーム B の優勝可能性が，どのように関係するのか，述べよ．

(2) 問 (1) で得られた問題に対する最大 s,t 流は何か？また最小 s,t カットは何か？ 最大 s,t 流の値と最小 s,t カットの容量が一致することを確かめよ．

(3) 上問の結果より，チーム B にまだ優勝の可能性があるかどうか，答えよ．

追加問題 (発展) 7.10 無向グラフ $G=(V,E)$ と各頂点に非負整数 $m(v)$ が与えられるとき，v の入次数を $m(v)$ とするような G の向き付けが存在するための必要十分条件は次の 2 つをともに満たすことである．それを証明せよ．

1. $|E| = \sum_{v \in V} m(v)$.
2. 任意の $X \subseteq V$ に対して，$|\{e \in E \mid e \subseteq X\}| \leq \sum_{v \in X} m(v)$.

(ヒント：問題 7.1 や 7.4 と同様に最大流問題としてモデル化し，最大流最小カット定理と整数流定理を適用してみよ．)