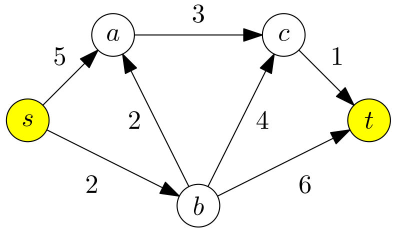
提出締切： 2021 年 5 月 28 日 12:59

授業内問題 6.1 次の有向グラフにおいて，最大 s,t 流を 1 つ見つけよ．また，それが最大 s,t 流であることを証明せよ．



各弧の横に添えられている数はその弧の容量を表す．(注意：増加道法を動かした様子を証明において記述する必要はない (記述しない方がよい)．それによって見つかった s,t 流が最大 s,t 流であることを証明するために，弱双対性を利用せよ．)

授業内問題 6.2 次に挙げるそれぞれの性質について，それを満たす有向グラフ $G=(V,A)$ と非負値費用関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$ の組 (G,c) を与え，なぜその性質を持つのか説明せよ．

1. 最大 s,t 整数流が 4 つ以上存在し，最小 s,t カットがただ 1 つ存在する．
2. 最大 s,t 整数流がただ 1 つ存在し，最小 s,t カットが 4 つ以上存在する．
3. 最大 s,t 整数流が 4 つ以上存在し，最小 s,t カットが 4 つ以上存在する．

復習問題 6.3 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，任意の s,t 流 $f\colon A\to\mathbb{R}$ に対して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$f^+(s)-f^-(s)=f^-(t)-f^+(t).$$

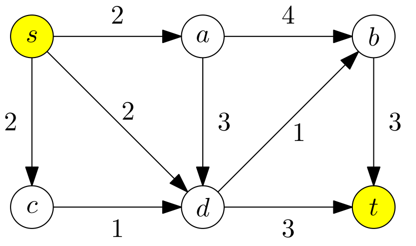
(ヒント：問題 6.7 の結果を用いてもよい．)

復習問題 6.4 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，任意の s,t 流 $f\colon A\to\mathbb{R}$ と任意の s,t カット S に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\mathtt{val}(f)\leq\mathtt{cap}(S).$$

(ヒント：問題 6.8 の結果を用いてもよい．)

復習問題 6.5 次の有向グラフにおいて，最大 s,t 流を 1 つ見つけよ．また，それが最大 s,t 流であることを証明せよ．



各弧の横に添えられている数はその弧の容量を表す．

復習問題 6.6 有向グラフ $G=(V,A)$，非負整数値容量関数 $c\colon A\to\mathbb{Z}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，増加道法の動きに関して以下の問いに答えよ．

1. 増加道法が停止したとき，出力される s,t 流は最大 s,t 流であることを証明せよ．(ヒント：問題 6.8 の結果を用いてもよい．)
2. 増加道法が停止することを証明せよ．
3. 以上の 2 つより，最大 s,t 流の値と最小 s,t カットの容量が等しいことを導け．
4. 増加道法が停止したとき，出力される s,t 流 f においては，任意の弧 a に対して $f(a)$ が整数であることを証明せよ．

補足問題 6.7 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，任意の s,t 流 $f\colon A\to\mathbb{R}$ に対して，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{a\in A}f(a)=\sum_{v\in V}f^+(v)=\sum_{v\in V}f^-(v).$$

補足問題 6.8 有向グラフ $G=(V,A)$，非負容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．このとき，任意の s,t 流 $f\colon A\to\mathbb{R}$ と任意の s,t カット S に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\mathtt{val}(f)=\sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\in S,v\notin S}}f((u,v))-\sum_{\substack{(u,v)\in A:\\ u\notin S,v\in S}}f((u,v)).$$

追加問題 6.9 有向グラフ $G=(V,A)$，非負値容量関数 $c\colon A\to\mathbb{R}$，2 頂点 $s,t\in V$ を考える．増加道法を G,c に対して動かし，停止して，最大 s,t 流 f が見つかったとする．

f に対する補助ネットワークにおいて，頂点 t を終点とする有向道の始点となる頂点全体から成る集合を $T\subseteq V$ として，$S=V-T$ とする．このとき，S は最小 s,t カットであることを証明せよ．

追加問題 6.10　有向グラフ $G = (V, A)$，非負容量関数 $c\colon A \to \mathbb{R}$，2 頂点 $s, t \in V$ を考える．以下の問いに答えよ．

1. 任意の s, t カット X, Y に対して，$X \cap Y$ と $X \cup Y$ も s, t カットであることを証明せよ．
2. 任意の s, t カット X, Y に対して，

   $$\mathtt{cap}(X) + \mathtt{cap}(Y) \geq \mathtt{cap}(X \cap Y) + \mathtt{cap}(X \cup Y)$$

   が成り立つことを証明せよ．(補足：この不等式は劣モジュラ不等式と呼ばれ，離散最適化の様々な場面において重要な役割を果たすことが知られている．)
3. 任意の最小 s, t カット X, Y に対して，$X \cap Y$ と $X \cup Y$ も最小 s, t カットであることを証明せよ．(ヒント：前小問の結果を利用せよ．)