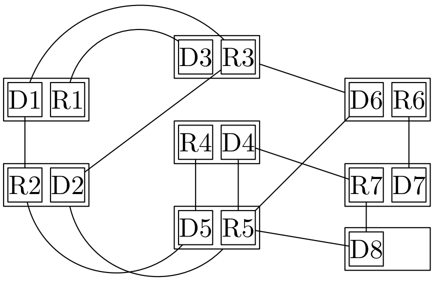
グラフとネットワーク (5) 2021 年 5 月 14 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2021 年 5 月 21 日 12:59

**授業内問題 5.1** 次の言明は正しくない．反例を示せ．

> 完全グラフ $G = (V, E)$ と非負辺重み関数 $w : E \to \mathbb{R}$ に対して，$G$ の任意の最大マッチングは $w$ に関する $G$ の最大重みマッチングである．

**授業内問題 5.2** ドナー交換腎移植において，生体腎移植のドナーだけではなく，献体ドナーもプールに入っている状況を考える．例えば，次のグラフで表されるような状況である．




ここで，D はドナー，R はレシピエントを表し，D$i$ と R$i$ がペアになっている．献体ドナーには，ペアとなっているレシピエントが存在しない．辺は型が適合しているドナーとレシピエント間に引かれている．

献体ドナーの腎臓をできるだけ多く移植に参加させるようにドミノ型腎移植を実施し，その上で，できるだけ多くのレシピエントに腎臓が移植されるようにする問題を，最大重み最大マッチング問題として定式化せよ．つまり，どのようなグラフにどう辺重みを与えるべきか，考えよ．(注：最大重み最大マッチングとは，最大マッチングの中で重みが最大のもののことである．)

---

**復習問題 5.3** 安定結婚問題における次の状況において，安定な結婚を 1 つ見つけよ．

- 男性は 4 名いて，$m_1, m_2, m_3, m_4$ とする．
- 女性は 4 名いて，$w_1, w_2, w_3, w_4$ とする．
- 各男性の希望順は以下の通りである (左に置かれる女性ほど好ましい)．
  - $m_1 : w_2, w_1, w_3, w_4$.
  - $m_2 : w_4, w_1, w_2, w_3$.
  - $m_2 : w_1, w_3, w_2, w_4$.
  - $m_3 : w_2, w_3, w_1, w_4$.
- 各女性の希望順は以下の通りである (左に置かれる男性ほど好ましい)．
  - $w_1 : m_1, m_3, m_2, m_4$.
  - $w_2 : m_3, m_4, m_1, m_2$.
  - $w_3 : m_4, m_2, m_3, m_1$.
  - $w_4 : m_3, m_2, m_1, m_4$.

---

**補足問題 5.4** 講義では，ドミノ型腎移植において移植を受けるレシピエントの数を最大化する問題を二部グラフにおける最大重み最大マッチングを求める問題としてモデル化した．その際，もともとペアであったドナーとレシピエントの間にも (型が適合しないのに) 辺を追加した．そのような辺を追加しないと，モデル化がうまく行かないことを例によって説明せよ．つまり，そのような辺を追加せずに最大重み最大マッチングを求めたとき，対応するドミノ型腎移植が存在しないような例を構成し，なぜ存在しないのか説明せよ．

---

**追加問題 (発展) 5.5** 頂点数 $n$ の色付き有向木 $G$ と頂点数 $m$ の色付き有向木 $H$ が与えられたとき，$H$ の部分グラフ $H'$ で，$G$ から $H'$ への色付き同型写像が存在するかどうか判定する問題を考える．

頂点数 $k$，辺数 $\ell$ の二部グラフにおいて，最大マッチングを $O(k^{1/2}\ell)$ 時間で求めるアルゴリズムが存在することを仮定して，講義で紹介したアルゴリズムの計算量が $O(nm^{3/2})$ であることを証明せよ．(注：講義で紹介したアルゴリズムを少し改変する必要があるかもしれない．例えば，二部グラフ $B$ を構成した瞬間に，$|X| > |Y|$ であれば，$X$ の頂点をすべて飽和するマッチングが存在しないので，$B$ の最大マッチングを計算する必要はない．)

**追加問題 5.6** 頂点数 $n$ の無向グラフの最大重みマッチングが高々$T(n)$ 時間で求められると仮定する．このとき，頂点数 $n$ の無向グラフの最大重み最大マッチングを $O(T(n))$ 時間で求めるアルゴリズムを設計せよ．

**追加問題 5.7** 研修医配属問題において安定な配属割当を求めるために，安定結婚問題に対する受入保留アルゴリズムを変更し，実際に変更したアルゴリズムが必ず安定な配属割当を出力することを証明せよ．(注：安定結婚問題に対して，研修医配属問題では次の違いがある．(1) 各病院には 1 以上の定員がある．(安定結婚問題では，定員が 1 であると考えることができる．) (2) 研修医，病院ともに，希望順に相手側のすべての選択肢を並べる必要がない．(3) 研修医の数と病院の数が異なっていてもよい．)