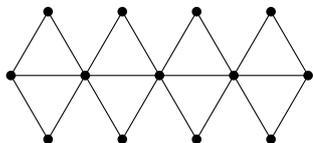


提出締切：2021年5月14日 12:59

授業内問題 4.1 次の無向グラフの最大マッチングを1つ見つけて、それが最大マッチングであることを証明せよ。



授業内問題 4.2 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。無向グラフ G の2つのマッチング $M, N \subseteq E$ が $|M| > |N|$ を満たすとする。このとき、 G のマッチング $M', N' \subseteq E$ で、次の4条件をすべて満たすものが存在することを証明せよ。

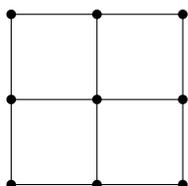
1. $|M'| = |M| - 1$.
2. $|N'| = |N| + 1$.
3. $M \cup N = M' \cup N'$.
4. $M \cap N = M' \cap N'$.

復習問題 4.3 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。グラフ G の最大マッチングは G の極大マッチングであることを証明せよ。

復習問題 4.4 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と G の任意のマッチング $M \subseteq E$ を考える。グラフ G において M に関する増加道が存在しないとき、 M が G の最大マッチングであることを証明せよ。

復習問題 4.5 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。このとき、 G の任意のマッチング $M \subseteq E$ と任意の頂点被覆 $C \subseteq V$ に対して $|M| \leq |C|$ が成り立つことを証明せよ。

復習問題 4.6 次の無向グラフの最大マッチングを1つ見つけて、それが最大マッチングであることを証明せよ。



補足問題 4.7 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。グラフ G に完全マッチング M が存在するとき、 $|V| = 2|M|$ が成り立つことを証明せよ。

補足問題 4.8 頂点数4の連結な無向グラフで、完全マッチングを持たないものを構成せよ。(なぜ完全マッチングを持たないのか、説明をせよ。)

補足問題 4.9 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。グラフ G に完全マッチングが存在するとき、それは G の最大マッチングであることを証明せよ。

補足問題 4.10 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。辺部分集合 $M \subseteq E$ が G の最大マッチングであるとき、 G において M に関する増加道が存在しないことを証明せよ。

追加問題 4.11 3正則連結無向グラフで、完全マッチングを持たないものを構成せよ。そして、なぜ完全マッチングを持たないのか、説明をせよ。(復習:3正則グラフとは、すべての頂点の次数が3であるグラフのことである。)

追加問題 4.12 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ の最大マッチング M_1 と極大マッチング M_2 を考える。このとき、 $|M_1| \leq 2|M_2|$ が成り立つことを証明せよ。(ヒント:対称差 $M_1 \Delta M_2$ を考えよ。)

追加問題 4.13 無向グラフ $G = (V, E)$ が木であると仮定する。このとき、 G の完全マッチングの個数は1か0であることを証明せよ。

追加問題 4.14 次の無向グラフの最大マッチングを1つ見つけて、それが最大マッチングであることを証明せよ。

