

提出締切：2021年5月7日 12:59

授業内問題 3.1 任意の木は二部グラフであることを証明せよ。

授業内問題 3.2 連結無向グラフ $G = (V, E)$ が $|E| \geq |V|$ を満たすとする。このとき、 G が閉路を含むことを証明せよ。

復習問題 3.3 任意の木 $G = (V, E)$ を考える。このとき、 $|V| \geq 2$ ならば、 G には次数1の頂点が2つ以上存在することを証明せよ。

復習問題 3.4 任意の木 $G = (V, E)$ (ただし、 $|V| \geq 2$) とその葉 $v \in V$ を考える。このとき、 $G - v$ も木であることを証明せよ。

復習問題 3.5 任意の木 $G = (V, E)$ に対して、 $|E| = |V| - 1$ が成り立つことを証明せよ。

復習問題 3.6 任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して、 e が G の切断辺であることを証明せよ。

復習問題 3.7

1. 任意の連結無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ を考える。このとき、 G に e を含む閉路が存在するならば、 $G - e$ は連結であることを証明せよ。
2. 任意の連結無向グラフが全域木を含むことを証明せよ。(ヒント：小問1の結果を用いてもよい。)

補足問題 3.8 任意の木 $G = (V, E)$ と任意の頂点 $v \in V$ を考える(ただし、 $|V| \geq 2$ とする)。頂点 v が G の葉ではないとき、 v が G の切断点であることを証明せよ。

補足問題 3.9 任意の木 $G = (V, E)$ と任意の頂点 $u, v \in V$ に対して、 G において u と v を結ぶ道がただ1つ存在することを証明せよ。

追加問題 3.10 木 $G = (V, E)$ を考える。 G の最大次数 $\Delta(G)$ が $\Delta(G) \geq 2$ を満たすとき、 G における葉の数が $\Delta(G)$ 以上となることを証明せよ。(ヒント：次数が $\Delta(G)$ である頂点に着目して、最大性論法をどのように用いるのか、工夫してみよ。)

追加問題 3.11 連結無向グラフ $G = (V, E)$ が $|E| = |V| - 1$ を満たすならば、 G は木であることを証明せよ。(ヒント：握手補題と帰納法を用いてもよい。証明すべきことが何であるのか、注意せよ。)

追加問題 3.12 任意の連結無向グラフ $G = (V, E)$ と任意の G の全域木 $T = (V, F)$ を考える。このとき、任意の辺 $e \in E - F$ に対して、無向グラフ $T' = (V, F \cup \{e\})$ にはただ1つ閉路が存在して、その閉路は e を含むことを証明せよ。(ヒント：演習問題 3.9 の結果を用いてもよい。)