

提出締切：2021年4月30日 12:59

授業内問題 2.1 任意の自然数 $d \geq 1$ に対して、 d 次元立方体グラフ Q_d が持つ頂点の数と辺の数はいくつか？ そうなる理由も答えよ。(ヒント：辺の数については、演習問題 2.3 と握手補題を用いて考えてもよい。)

授業内問題 2.2 任意の有向グラフ G を考える。

1. $\delta^+(G) \geq 1$ ならば、 G が有向閉路を含むことを証明せよ。(注：この性質は、「有向グラフのトポロジカル・ソート」と呼ばれる構造が有向閉路を含まない有向グラフに必ず存在することを証明する際に用いられる。)
2. 「 G が有向閉路を含むならば、 $\delta^+(G) \geq 1$ である」という命題は成り立たない。反例を挙げよ。(それが、なぜ反例であるのかも説明せよ。)

復習問題 2.3 無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ の直積 $G_1 \square G_2$ を考える。任意の $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ に対して、

$$\deg_{G_1 \square G_2}((v_1, v_2)) = \deg_{G_1}(v_1) + \deg_{G_2}(v_2)$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 2.4 任意の無向グラフ G と任意の自然数 $k \geq 1$ を考える。

1. $\delta(G) \geq k$ ならば、 G が頂点数 $k+1$ の道を含むことを証明せよ。
2. 「 $\delta(G) \geq k$ ならば、 G が頂点数 $k+2$ の道を含む」という命題は成り立たない。任意の自然数 $k \geq 1$ に対して、反例を挙げよ。(なぜ、それが反例であるのかも説明せよ。)

補足問題 2.5 演習問題 2.4 の状況を考える。つまり、任意の無向グラフ G と任意の自然数 $k \geq 1$ を考える。このとき、演習問題 2.4.1 にある命題の逆、すなわち、「 G が P_{k+1} を含むならば、 $\delta(G) \geq k$ である」は成り立たない。任意の自然数 $k \geq 1$ に対して、反例を挙げよ。(なぜ、それが反例であるのかも説明せよ。)

追加問題 2.6 任意の自然数 $n \geq 1$ を考える。頂点数 n の完全グラフ K_n が持つ辺の数はいくつか？ そうなる理由も答えよ。

追加問題 2.7 任意の自然数 $m \geq 1$ と $n \geq 1$ を考える。頂点数 $m+n$ の完全二部グラフ $K_{m,n}$ が持つ辺の数はいくつか？ そうなる理由も答えよ。

追加問題 2.8 任意の自然数 $d \geq 1$ に対して、 d 次元立方体グラフは二部グラフであることを証明せよ。

追加問題 2.9 次は正しいか否か、理由も付けて答えよ。

頂点の除去を行うことで連結成分の数が減る無向グラフは存在しない。

追加問題 2.10 任意の無向グラフ G と任意の自然数 $k \geq 2$ を考える。

1. $\delta(G) \geq k$ ならば、 G が頂点数 $k+1$ 以上の閉路を含むことを証明せよ。(ヒント： G における長さ最大の道を考えよ。)
2. 「 $\delta(G) \geq k$ ならば、 G が頂点数 $k+2$ 以上の閉路を含む」という命題は成り立たない。任意の $k \geq 2$ に対して、反例を挙げよ。(それが、なぜ反例であるのかも説明せよ。)
3. 「 G が頂点数 $k+1$ 以上の閉路を含むならば、 $\delta(G) \geq k$ である」という命題は成り立たない。任意の $k \geq 2$ に対して、反例を挙げよ。(それが、なぜ反例であるのかも説明せよ。)

追加問題 2.11 任意の自然数 $n \geq 1$ と $k \geq 1$ を考える。

1. 頂点数 n の無向グラフ G の連結成分の数が k であるとする。このとき、 G のある連結成分の頂点数が n/k 以下となることを証明せよ。
2. 小問 1 にある命題の結論を強めたもの、すなわち、「頂点数 n の無向グラフ G の連結成分の数が k であるとき、 G のある連結成分の頂点数が $(n/k) - 1$ 以下となる」という命題は成り立たない。任意の $k \geq 1$ に対して、反例を挙げよ。(それが、なぜ反例であるのかも説明せよ。)

追加問題 (発展) 2.12 頂点数が $n \geq 3$ である無向グラフ G を考える。このとき、 $\delta(G) \geq n/2$ ならば、 G が頂点数 n の閉路を持つことを証明せよ。(注：頂点数 n の閉路のことをハミルトン閉路と呼ぶことが多い。)(ヒント：問題 2.11.1 を使ってもよい。)