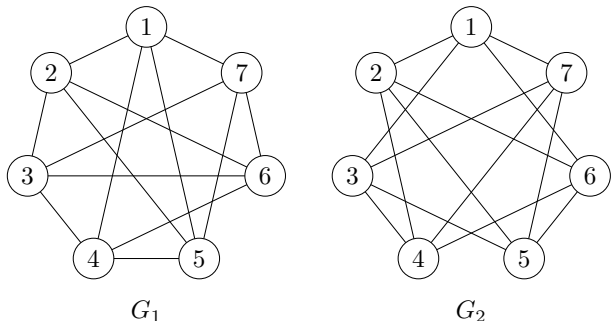


提出締切：2021年4月23日 12:59

授業内問題 1.1 次の2つの無向グラフ G_1, G_2 に対して、 G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ。



復習問題 1.6 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 1.7 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して、

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

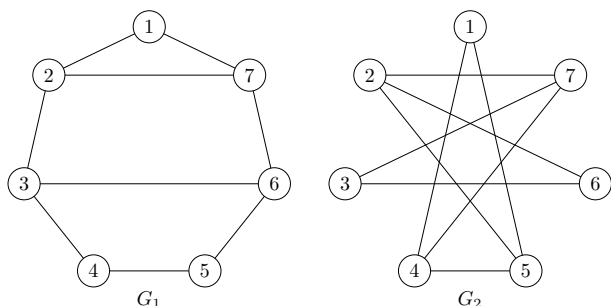
が成り立つことを証明せよ。(ヒント：問題1.6の結果を用いてもよい。)

授業内問題 1.2 任意の有向グラフ $G = (V, A)$ に対して、以下の2つが成り立つことを証明せよ。

1. $\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|$.
2. $\sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$.

復習問題 1.3 任意の無向グラフ G に対して、 G から G への同型写像が存在することを証明せよ。

復習問題 1.4 次の2つの無向グラフ G_1, G_2 に対して、 G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ。



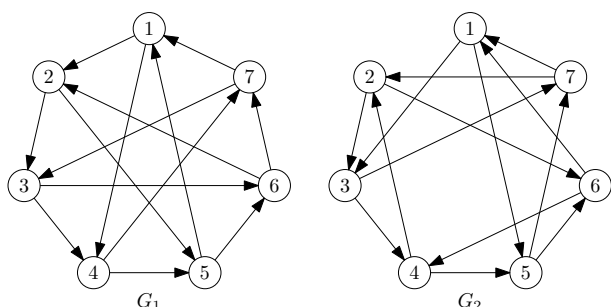
補足問題 1.8 以下の問いに答えよ。

1. 任意の集合 A, B と任意の全単射 $f: A \rightarrow B$ に対して、逆写像 $f^{-1}: B \rightarrow A$ が存在し、 f^{-1} も全単射であることを証明せよ。(注：写像 $f: A \rightarrow B$ の逆写像とは、写像 $g: B \rightarrow A$ で、合成写像 $g \circ f$ が A から A への恒等写像であり、合成写像 $f \circ g$ が B から B への恒等写像であるもののことである。)
2. 任意の無向グラフ G_1, G_2 に対して、 G_1 から G_2 への同型写像が存在するならば、 G_2 から G_1 への同型写像も存在することを証明せよ。

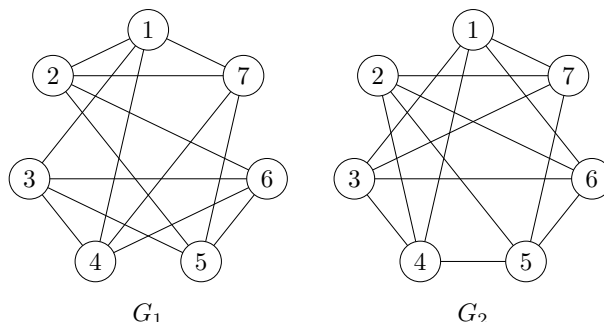
補足問題 1.9 以下の問いに答えよ。

1. 任意の集合 A, B, C と任意の2つの全単射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ に対して、合成写像 $g \circ f: A \rightarrow C$ も全単射であることを証明せよ。
2. 任意の無向グラフ G_1, G_2, G_3 に対して、 G_1 から G_2 への同型写像が存在し、かつ、 G_2 から G_3 への同型写像が存在するならば、 G_1 から G_3 への同型写像が存在することを証明せよ。

復習問題 1.5 次の2つの有向グラフ G_1, G_2 に対して、 G_1 から G_2 への同型写像を1つ見つけよ。



追加問題 (発展) 1.10 次の2つの無向グラフ G_1, G_2 は同型ではない。なぜか？説明せよ。



追加問題 1.11 任意の有向グラフ $G = (V, A)$ に対して, 以下の2つが成り立つことを証明せよ. (ヒント: 問題 1.2 の結果を用いてもよい.)

$$1. \delta^-(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^-(G).$$

$$2. \delta^+(G) \leq \frac{|A|}{|V|} \leq \Delta^+(G).$$

追加問題 1.12

1. 頂点数 5 の無向グラフで, どの頂点の次数も 3 であるものは存在するか? (理由も述べよ.)
2. 頂点数 6 の無向グラフで, どの頂点の次数も 3 であるものは存在するか? (理由も述べよ.)

追加問題 1.13

1. 頂点数 5 の有向グラフで, どの頂点の入次数も異なり, かつ, どの頂点の出次数も異なるようなものを 1 つ見つけよ.
2. 頂点数が任意の自然数 $n \geq 2$ の場合はどうか?

追加問題 1.14 任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$\sum_{\{u,v\} \in E} (\deg_G(u) + \deg_G(v)) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)^2$$

という等式が成り立つことを証明せよ. (ヒント: 数え上げによる証明を行ってみよ.)