

1 レポート課題

次の 5 問にすべて答えよ。以下、 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ とする。

■問 1 n を 1 以上の自然数とする。商品を買うと n 種類の景品の中の 1 つが当たる。景品の集合は $\{1, 2, \dots, n\}$ であるとする。商品を買ったときに、景品 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ が当たる確率は、 i に依らず $1/n$ であるとする。これらの確率は商品の間で独立であるとする。

任意の自然数 $k \in \{1, \dots, n\}$ を考える。

1. 景品 $1, 2, \dots, k$ を当てるまでに買う商品の数の期待値を、 n と k の式で表せ。
2. 異なる k 種類の景品を当てるまでに買う商品の数の期待値を、 n と k の式で表せ。

■問 2 自然数 $n \in \mathbb{N}$ と実数 $p \in (0, 1)$ に対して、頂点数が n 、辺確率が p であるような、エルデシュとレニイのランダム・グラフを $\mathbb{G}(n, p)$ で表す。

$\mathbb{G}(n, p)$ に従って得られるグラフ $G = (V, E)$ を考える。

1. 任意の頂点 $v \in V$ に対して、その次数 $\deg(v)$ が次を満たすことを証明せよ。

$$E[\deg(v)] = (n-1)p.$$

2. p が定数であるとき、任意の頂点 $v \in V$ に対して、その次数 $\deg(v)$ が次を満たすことを証明せよ。

$$\Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

■問 3 次の疑似コードで記述される乱択アルゴリズムは、停止するとき、入力配列 A の最小値を返す。(この事実は以下の議論で使用してもよい。) 入力において、 A の要素数は必ず 1 以上であると仮定する。

```

1: def f(A) # A: array of distinct numbers
2:   p = a number in A chosen uniformly at random
3:   return p if length(A) == 1
4:   x = f(A-{p})
5:   print "G"
6:   if p < x then x = f(A)
7:   return x
8: end

```

ここで、4 行目における $A-\{p\}$ は、入力配列 A から要素 p

を削除して得られる配列を表すものとする。

1. 配列 A を入力としたときに画面に書かれる G の数を X_A で表し、 $x_n = \max\{E[X_A] \mid |A| = n\}$ とする。このとき、 $x_1 = 0$ であることを証明せよ。
2. $n \geq 2$ であるとき、

$$x_n \leq x_{n-1} + 1 + \frac{1}{n}x_n$$

が成り立つことを証明せよ。

3. 次の漸化式を満たす数列 $\{t_n\}_{n \geq 1}$ を考える。

$$t_1 = 0$$

$$t_n = t_{n-1} + 1 + \frac{1}{n}t_n \quad (n \geq 2)$$

このとき、任意の $n \geq 1$ に対して $x_n \leq t_n$ が成り立つことを証明せよ。

4. 数列 $\{t_n\}_{n \geq 1}$ の一般項を求めよ。
5. 以上から、 $x_n = O(n \log n)$ であることを導出せよ。

■問 4 次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$ を考える。状態空間は $\{1, 2, 3\}$ であるとする。

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

1. このマルコフ連鎖の状態遷移図を描け。
2. 条件つき確率 $\Pr(X_3 = 3 \mid X_0 = 2)$ が何であるか、答えよ。
3. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか、すべて答えよ。
4. このマルコフ連鎖において、極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t$ が存在するかどうか答えよ。存在する場合、その極限が何であるか、答えよ。

■問 5 A さんは n 万円を所持している (ただし、 n は 0 以上の自然数とする)。彼が賭けを 1 回行うごとに、 $1/4$ の確率で所持金は 1 万円増加し、 $3/4$ の確率で所持金は 1 万円減少する。賭けの結果は、それまでの賭けの結果に依存しない。賭けは繰り返し行われ、所持金が 0 万円か $4n$ 万円になると終了する。

n を用いた式によって、 A さんが 0 万円で終了する確率を求めよ。

2 提出法，形式，採点基準 など

- 提出締切は 2 月 15 日 (火) 23:59 JST.
- 使用言語は日本語に限る.
- 提出法は Google Classroom にて，課題「必須レポート提出 2」より PDF ファイル をアップロードする．レポートの冒頭に，学籍番号と氏名を必ず記載すること．
- 採点基準は，(1) 記述の正確さと厳密さ，(2) 表現の適切さ，(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である．期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない．50 点満点．
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は，証明や説明が過不足なく記述されているか，そして，それが数学的・論理的に正しいか，ということの意味する．「(2) 表現の適切さ」は，証明や説明の記述における言語表現が注意深く用いられているか，ということの意味する．「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は，証明や説明が分かりやすい構造を成しているか，ということの意味し，これには文書作成ソフトウェア，図表作成ソフトウェアの適切な使用法も含まれる．
- 用語と記法は授業におけるものに従う．また，提出される答案において，授業中に「性質」として紹介した事項は証明せずに用いてもよい．しかし，その場合は，どの性質を用いているのか明示しなければならない．
- 不正行為については，学修要覧を参照すること．一方で，他の履修登録生 (受講生) と相談したり，文献を調べることは大いに推奨する．その際は，レポート内で (例えば，末尾や冒頭で)，相談者や参考文献を必ず記載し，どの部分の相談を行ったのか，あるいは，どの部分で参考にしたのか，本文中に記述すること．その記述が無い場合は，不正行為を疑われる可能性がある．
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合，教員が学生に問い合わせを行うことがありうる．その場合，学生は (Zoom ミーティングなどを通して，口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある．その一方で，そのような問い合わせがない場合に，レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない．

以上