

## 1 レポート課題

次の5問にすべて答えよ。

■問1 任意の自然数  $n \geq 1$  に対して、次を満たす自然数列  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  を考える。

- $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ .
- 任意の  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対して,  $a_i \leq i$ .

例えば,  $n = 3$  のとき, この性質を満たす数列をすべて挙げると, 以下の5つとなる。

$$(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3).$$

以下の問いに答えよ。

1.  $n = 4$  のとき, この性質を満たす数列をすべて挙げ, その総数が何であるか, 答えよ。
2. この性質を満たす数列の総数が第  $n$  カタラン数と等しいことを, 全単射による証明によって示せ. 入れ子状の括弧列, 順序付きラベルなし全二分木, デイック道のどれを用いてもよい。

■問2 自然数  $n \geq 1$  を入力とする, 次のアルゴリズムを考える。

```

1: def fnct(n)
2:   for i in 0..(n-1)
3:     print "K"
4:   end
5:   if n < 5
6:     return
7:   else
8:     fnct(n/2)
9:     fnct(n/5)
10:  fnct(n/5)
11:  end
12: end
    
```

ここで, 演算子  $/$  は自然数に対する除算であり, 小数点以下は切り捨てられる。また, 2行目から4行目までは  $i$  が0から  $n-1$  となるまで  $n$  回だけ3行目を繰り返すことを表す。

自然数  $n \geq 1$  に対して,  $\text{fnct}(n)$  が出力する  $K$  の総数を  $k_n$  で表す。以下の問いに答えよ。

1. 任意の自然数  $n \geq 5$  に対して,

$$k_n = n + k_{\lfloor n/2 \rfloor} + 2k_{\lfloor n/5 \rfloor}$$

が成り立つことを証明せよ。

2.  $k_n = O(n \log n)$  が成り立つことを証明せよ。

■問3 次の漸化式を考える。

$$c_n = \begin{cases} 3 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって, 数列  $\{c_n\}_{n \geq 0}$  の一般項  $c_n$  を閉じた形で与えよ。(注: 母関数を用いない方法によって一般項  $c_n$  を定めた場合は, 部分点を与える。)

■問4 集合  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の置換群  $G$  で, 次に挙げる  $S$  が生成するものを考える。

$$S = \{(1\ 2\ 3\ 4\ 5), (2\ 5)(3\ 4)\}.$$

以下の問いに答えよ。

1.  $G$  の要素を過不足なくすべて, 巡回記法で挙げよ。
2.  $G$  の各要素について, それが偶置換であるか奇置換であるか, 答えよ。

■問5 虚数単位を  $i$  とし, 複素数  $\omega$  を

$$\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$$

とするとき, 群  $G$  を次のように定義する。すなわち,

$$G = \{1, \omega, \omega^2, -1, -\omega, -\omega^2\}$$

であり, 複素数の積を群  $G$  の演算とする。一方, 群  $H$  は次の表示を持つ群である。

$$H = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$$

ここで,  $e$  は  $H$  の単位元である。以下の問いに答えよ。

1. 群  $G$  と  $H$  の群表を書け。
2.  $G$  と  $H$  において, 各要素の逆元は何であるか, 答えよ。
3. 群  $G$  と  $H$  がそれぞれアーベル群であるかどうか, 答えよ。

## 2 提出法，形式，採点基準 など

- 提出締切は 12 月 28 日 (火) 23:59 JST.
- 使用言語は日本語に限る.
- 提出法は Google Classroom にて，課題「必須レポート提出」より PDF ファイル をアップロードする．レポートの冒頭に，学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は，(1) 記述の正確さと厳密さ，(2) 表現の適切さ，(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である．期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない．50 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は，証明や説明が過不足なく記述されているか，そして，それが数学的・論理的に正しいか，ということの意味する．「(2) 表現の適切さ」は，証明や説明の記述における言語表現が注意深く用いられているか，ということの意味する．「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は，証明や説明が分かりやすい構造を成しているか，ということの意味し，これには文書作成ソフトウェア，図表作成ソフトウェアの適切な使用法も含まれる.
- 用語と記法は授業におけるものに従う．また，提出される答案において，授業中に「性質」として紹介した事項は証明せずに用いてもよい．しかし，その場合は，どの性質を用いているのか明示しなければならない.
- 不正行為については，学修要覧を参照すること．一方で，他の履修登録生 (受講生) と相談したり，文献を調べることは大いに推奨する．その際は，レポート内で (例えば，末尾や冒頭で)，相談者や参考文献を必ず記載し，どの部分の相談を行ったのか，あるいは，どの部分で参考にしたのか，本文中に記述すること．その記述が無い場合は，不正行為が疑われる可能性がある.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合，教員が学生に問い合わせを行うことがありうる．その場合，学生は (Zoom ミーティングなどを通して，口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある．その一方で，そのような問い合わせがない場合に，レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.

以上