

離散数理工学 第 13 回

離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 1 月 25 日

最終更新：2022 年 1 月 17 日 19:11

今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- ▶ 「ギャンブラーの破産」において、破産確率を計算できる
- ▶ 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において、到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は

「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの

次の状況を考える

- ▶ ある街の天気は「晴れ (F)」, 「曇り (C)」, 「雨 (R)」 のいずれか
- ▶ 天気は毎日, 確率的に変わる
 - ▶ 晴れの日の翌日の天気が晴れである確率 = $1/2$
 - ▶ 晴れの日の翌日の天気が曇りである確率 = $1/3$
 - ▶ 晴れの日の翌日の天気が雨である確率 = $1/6$
 - ▶ 曇りの日の翌日の天気が晴れである確率 = $1/3$
 - ▶ 曇りの日の翌日の天気が曇りである確率 = $1/3$
 - ▶ 曇りの日の翌日の天気が雨である確率 = $1/3$
 - ▶ 雨の日の翌日の天気が晴れである確率 = $1/4$
 - ▶ 雨の日の翌日の天気が曇りである確率 = $1/2$
 - ▶ 雨の日の翌日の天気が雨である確率 = $1/4$

ポイント

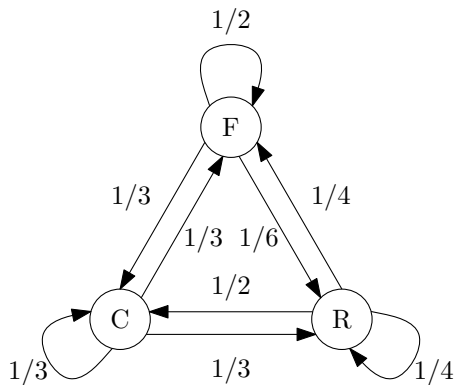
次の日の天気 (に関する確率) は, 前の日の天気だけから決まる

見にくいので，行列で表現する

$$P = \begin{array}{c} \text{F} \\ \text{C} \\ \text{R} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{F} & \text{C} & \text{R} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{array} \right) \end{array}$$

「行」から「列」へ推移する

見にくいので、状態遷移図で表現する



「始点」から「終点」へ推移する

目次

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ

ギャンブラーの破産：設定

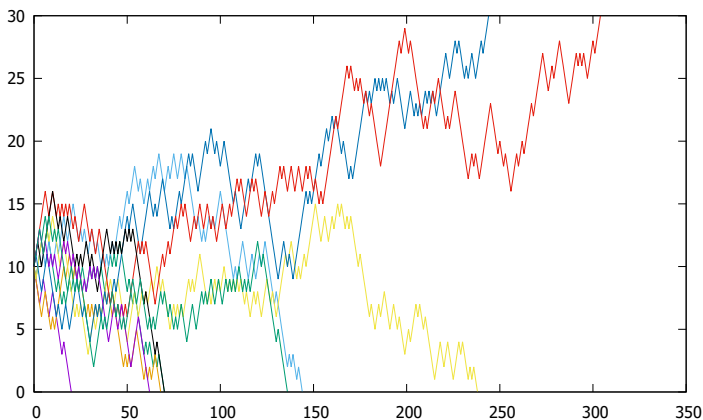
設定

- ▶ 1人のギャンブラー，所持金 n 万円
- ▶ 賭けを行うごとに，
 - ▶ $1/2$ の確率で，所持金が 1 万円増加
 - ▶ $1/2$ の確率で，所持金が 1 万円減少
- ▶ 所持金が $3n$ 万円か 0 万円になったら，終了

問題

- 1 最終的に，0 万円になって終了する確率は？ (破産確率)
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

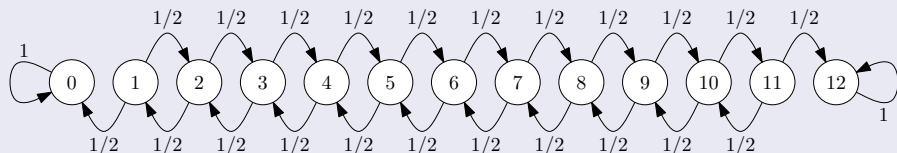
ギャンブラーの破産：とりあえず、シミュレーション

 $n = 10$ の場合

10回の試行中、破産は8回

ギャンブラーの破産：マルコフ連鎖としてのモデル化

- ▶ 状態空間は $\{0, 1, \dots, n, \dots, 3n\}$
- ▶ $X_t = t$ 回目の賭けをした後の所持金 (単位：万円) (確率変数)

状態遷移図： $n = 4$ のとき

ギャンブラーの破産：興味の対象

問題

- 1 最終的に、0万円になって終了する確率は？
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

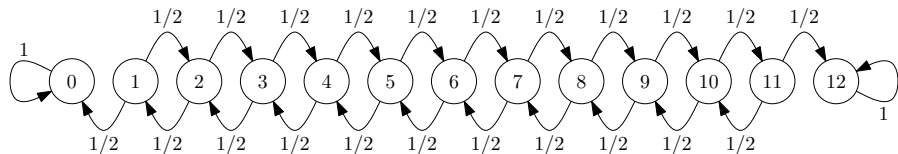
興味の対象

- 1 $p_n = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = n)$ (確率)
- 2 $T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式

$p_k =$ 所持金が k 万円であるとき, 0 万円で終了する確率

$$p_k = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k)$$



▶ このとき, 次の漸化式が得られる

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式 (詳細)

$1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
 p_k &= \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k) \\
 &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k) \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = h) \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\
 &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k - 1) \Pr(X_1 = k - 1 \mid X_0 = k) + \\
 &\quad \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k + 1) \Pr(X_1 = k + 1 \mid X_0 = k) \\
 &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_1 = k - 1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_1 = k + 1) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k - 1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k + 1) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} p_{k-1} + \frac{1}{2} p_{k+1}
 \end{aligned}$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

▶ つまり, $1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 1, \\
 p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\
 p_{3n} &= 0
 \end{aligned}$$

▶ つまり, $1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

▶ $q_k = p_{k+1} - p_k$ と置くと

$$\begin{aligned}
 q_0 &= p_1 - p_0 = p_1 - 1, \\
 q_k &= q_{k-1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 1, \\
 p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\
 p_{3n} &= 0
 \end{aligned}$$

- ▶ つまり, $1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

- ▶ $q_k = p_{k+1} - p_k$ と置くと

$$\begin{aligned}
 q_0 &= p_1 - p_0 = p_1 - 1, \\
 q_k &= q_{k-1} \quad (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき})
 \end{aligned}$$

- ▶ つまり, $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \dots = q_{3n-1}$ なので, ...
(次のページへ続く)

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり, $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり, $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり, $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

⋮

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり, $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

$$\vdots$$

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

$$\vdots$$

$$p_{3n} = 1 + 3nq_0$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

▶ つまり, $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

$$\vdots$$

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

$$\vdots$$

$$0 = p_{3n} = 1 + 3nq_0$$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

- ▶ つまり, $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

$$\vdots$$

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

$$\vdots$$

$$0 = p_{3n} = 1 + 3nq_0$$

- ▶ したがって, $q_0 = -\frac{1}{3n}$

最終的に 0 万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

- ▶ つまり, $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \cdots = q_{3n-1}$ なので

$$p_1 = p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0,$$

$$p_2 = p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0,$$

$$\vdots$$

$$p_k = p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0,$$

$$\vdots$$

$$0 = p_{3n} = 1 + 3nq_0$$

- ▶ したがって, $q_0 = -\frac{1}{3n}$
- ▶ したがって, $p_k = 1 - \frac{k}{3n}$, 特に, $p_n = 1 - \frac{n}{3n} = \frac{2}{3}$

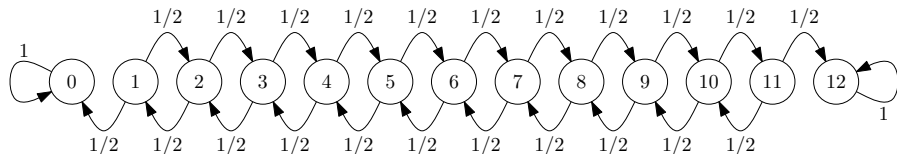
終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (1)

興味の対象

$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

- ▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$



終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (1)

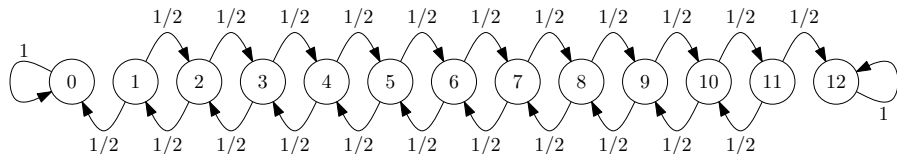
興味の対象

$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

- ▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

- ▶ このとき, $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$ が成り立つ



終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (1)

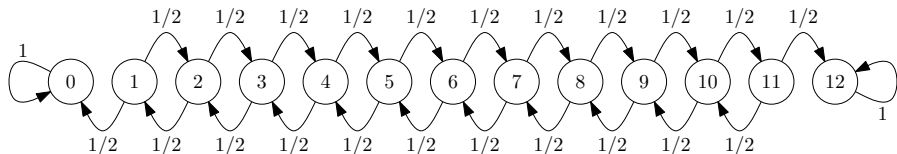
興味の対象

$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

- ▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

- ▶ このとき, $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$ が成り立つ



- ▶ また, **直感的には**, $1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき, 次が成り立つ

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2}T_{n,k-1} + \frac{1}{2}T_{n,k+1}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (1)

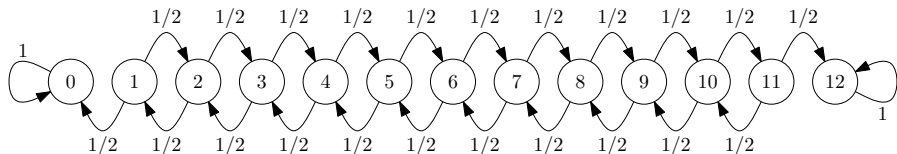
興味の対象

$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$ (確率変数の期待値)

- ▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

- ▶ このとき, $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$ が成り立つ



- ▶ また, **直感的には**, $1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき, 次が成り立つ?

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2}T_{n,k-1} + \frac{1}{2}T_{n,k+1}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned} T_{n,k} \\ &= \mathbf{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \end{aligned}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned}
 T_{n,k} &= \mathbf{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} \mathbf{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k)
 \end{aligned}$$

演習問題

任意の自然数値確率変数 X, Y と事象 A に対して, $\Pr(A) \neq 0$ のとき

$$\mathbf{E}[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbf{N}} \mathbf{E}[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned}
 T_{n,k} &= \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\
 &= \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k+1] \Pr(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) + \\
 &\quad \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k-1] \Pr(X_1 = k-1 \mid X_0 = k)
 \end{aligned}$$

演習問題

任意の自然数値確率変数 X, Y と事象 A に対して, $\Pr(A) \neq 0$ のとき

$$\mathbb{E}[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned}
 T_{n,k} &= \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\
 &= \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k+1] \Pr(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) + \\
 &\quad \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k-1] \Pr(X_1 = k-1 \mid X_0 = k) \\
 &= (1 + T_{n,k+1}) \cdot \frac{1}{2} + (1 + T_{n,k-1}) \cdot \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

演習問題

任意の自然数値確率変数 X, Y と事象 A に対して, $\Pr(A) \neq 0$ のとき

$$\mathbb{E}[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式 (2)

$$\begin{aligned}
 T_{n,k} &= \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\
 &= \sum_{h=0}^{3n} \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\
 &= \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0=k, X_1=k+1] \Pr(X_1=k+1 \mid X_0=k) + \\
 &\quad \mathbb{E}[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0=k, X_1=k-1] \Pr(X_1=k-1 \mid X_0=k) \\
 &= (1 + T_{n,k+1}) \cdot \frac{1}{2} + (1 + T_{n,k-1}) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \frac{1}{2}T_{n,k+1} + \frac{1}{2}T_{n,k-1}
 \end{aligned}$$

演習問題

任意の自然数値確率変数 X, Y と事象 A に対して, $\Pr(A) \neq 0$ のとき

$$\mathbb{E}[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (1)

解くべき漸化式

$$T_{n,k} = \begin{cases} 0 & (k \in \{0, 3n\} \text{ のとき}) \\ 1 + \frac{1}{2}T_{n,k+1} + \frac{1}{2}T_{n,k-1} & (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

最終的に知りたいのは, $T_{n,n}$

- ▶ $1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき,

$$T_{n,k+1} - T_{n,k} = T_{n,k} - T_{n,k-1} - 2$$

- ▶ $U_k = T_{n,k+1} - T_{n,k}$ と置くと,

$$1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき, } U_k = U_{k-1} - 2$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$\begin{aligned}T_{n,1} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0, \\T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\&= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2,\end{aligned}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

$$\begin{aligned} T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \end{aligned}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

$$\begin{aligned} T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$T_{n,k} = T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1} (T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1),$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

$$\begin{aligned} T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$T_{n,k} = T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1} (T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1),$$

$$\vdots$$

$$T_{n,3n} = 3nU_0 - 3n(3n-1)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (2)

$$T_{n,1} = T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0,$$

$$\begin{aligned} T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$T_{n,k} = T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1} (T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1),$$

$$\vdots$$

$$0 = T_{n,3n} = 3nU_0 - 3n(3n-1)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) && (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

▶ したがって, $U_0 = 3n - 1$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

- ▶ したがって, $U_0 = 3n - 1$
- ▶ したがって, $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ のとき,

$$T_{n,k} = k(3n - 1) - k(k - 1) = k(3n - k)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

- ▶ したがって, $U_0 = 3n - 1$
- ▶ したがって, $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ のとき,

$$T_{n,k} = k(3n - 1) - k(k - 1) = k(3n - k)$$

- ▶ $T_{n,0} = 0$ なので, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 3n\}$ のとき,

$$T_{n,k} = k(3n - 1) - k(k - 1) = k(3n - k)$$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値) : 漸化式を解く (3)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}), \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

- ▶ したがって, $U_0 = 3n - 1$
- ▶ したがって, $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ のとき,

$$T_{n,k} = k(3n - 1) - k(k - 1) = k(3n - k)$$

- ▶ $T_{n,0} = 0$ なので, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 3n\}$ のとき,

$$T_{n,k} = k(3n - 1) - k(k - 1) = k(3n - k)$$

つまり, $T_n = T_{n,n} = n(3n - n) = 2n^2$

ギャンブラーの破産：設定

設定

- ▶ 1人のギャンブラー，所持金 n 万円
- ▶ 賭けを行うごとに，
 - ▶ $1/2$ の確率で，所持金が 1 万円増加
 - ▶ $1/2$ の確率で，所持金が 1 万円減少
- ▶ 所持金が $3n$ 万円か 0 万円になったら，終了

問題と解答

- 1 最終的に，0 万円になって終了する確率は？ (破産確率)
 $\rightsquigarrow \frac{2}{3}$
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？
 $\rightsquigarrow 2n^2$

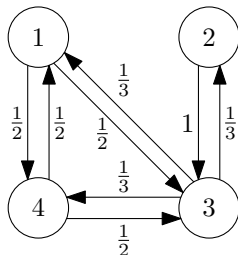
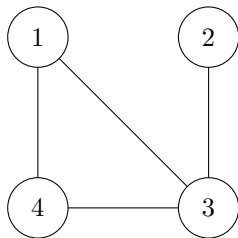
目次

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ

有限グラフ上の単純ランダムウォーク：設定

有限無向グラフ $G = (V, E)$: V は G の頂点集合, E は G の辺集合

- ▶ 時刻 $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して, 次のように駒を動かす
 - ▶ $t = 0$ のとき, 駒はある決められた頂点 $u \in V$ に置かれている
 - ▶ $t = k$ のとき, 駒が頂点 $v \in V$ に置かれているとすると, $t = k + 1$ のとき, 駒は v の隣接頂点へ等確率で動かされる
- ▶ 時刻 t において駒の置かれる頂点を X_t とすると, $\langle X_t \mid t \in \mathbb{N} \rangle$ は確率過程



- ▶ この確率過程を G 上の **単純ランダムウォーク** と呼ぶ

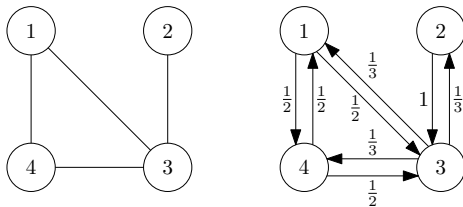
有限グラフ上の単純ランダムウォーク：興味の対象

有限無向グラフ $G = (V, E)$

到達時刻 とは？

G 上の単純ランダムウォークにおいて、
 頂点 $u \in V$ から頂点 $v \in V$ への **到達時刻** とは、

$$\tau_{u,v} = \min\{t \geq 0 \mid X_t = v, X_0 = u\}$$



- ▶ この期待値を到達時刻と呼ぶこともある
- ▶ 「 $t \geq 0$ 」ではなく「 $t \geq 1$ 」とする場合もある

到達時刻：問題

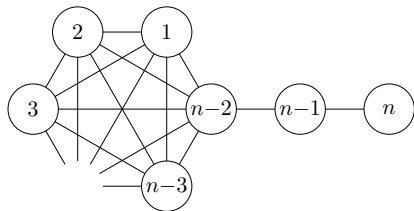
問題

次の2つのグラフを考えると、
 頂点1から頂点 n への到達時刻の期待値が大きいのはどちらか？

頂点数 n の道

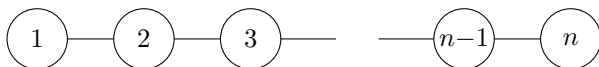


頂点数 $n-2$ の完全グラフ + 長さ2の道



到達時刻：道の場合 (1)

次のグラフを考える (頂点数 n の道)



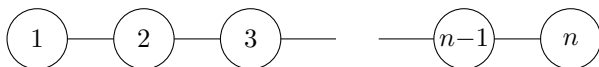
左端の頂点を 1, 右端の頂点を n として, $E[\tau_{1,n}]$ を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \cdots + \tau_{n-1,n}$$

到達時刻：道の場合 (1)

次のグラフを考える (頂点数 n の道)



左端の頂点を 1, 右端の頂点を n として, $E[\tau_{1,n}]$ を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

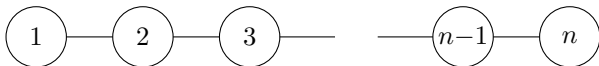
$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \cdots + \tau_{n-1,n}$$

- ▶ したがって, 期待値の線形性より

$$E[\tau_{1,n}] = E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \cdots + E[\tau_{n-1,n}]$$

到達時刻：道の場合 (1)

次のグラフを考える (頂点数 n の道)



左端の頂点を 1, 右端の頂点を n として, $E[\tau_{1,n}]$ を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

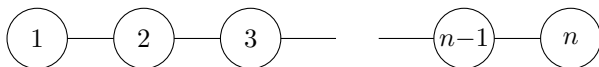
$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \cdots + \tau_{n-1,n}$$

- ▶ したがって, 期待値の線形性より

$$E[\tau_{1,n}] = E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \cdots + E[\tau_{n-1,n}]$$

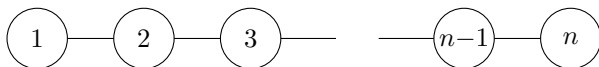
- ▶ つまり, 任意の $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対する $E[\tau_{i,i+1}]$ が分かればよい

到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出



- ▶ まず, $E[\tau_{1,2}] = 1$

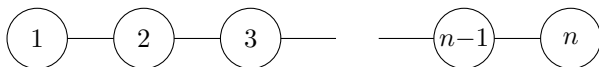
到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出



- ▶ まず, $E[\tau_{1,2}] = 1$
- ▶ 次に, $i \in \{2, \dots, n-1\}$ のとき,

$$E[\tau_{i,i+1}] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + E[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2}$$

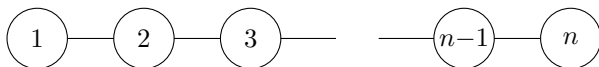
到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出



- ▶ まず, $E[\tau_{1,2}] = 1$
- ▶ 次に, $i \in \{2, \dots, n-1\}$ のとき,

$$\begin{aligned}
 E[\tau_{i,i+1}] &= 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + E[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \frac{1}{2}(E[\tau_{i-1,i}] + E[\tau_{i,i+1}])
 \end{aligned}$$

到達時刻：道の場合 (2) — 漸化式の導出



- ▶ まず, $E[\tau_{1,2}] = 1$
- ▶ 次に, $i \in \{2, \dots, n-1\}$ のとき,

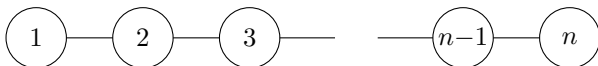
$$\begin{aligned}
 E[\tau_{i,i+1}] &= 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + E[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 1 + \frac{1}{2}(E[\tau_{i-1,i}] + E[\tau_{i,i+1}]) \\
 \therefore E[\tau_{i,i+1}] &= 2 + E[\tau_{i-1,i}]
 \end{aligned}$$

到達時刻：道の場合 (3) — 結論

- ▶ したがって, $a_i = E[\tau_{i,i+1}]$ と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \dots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ これを解くと, 任意の $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して, $a_i = 2i - 1$



到達時刻：道の場合 (3) — 結論

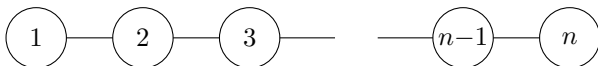
- ▶ したがって, $a_i = E[\tau_{i,i+1}]$ と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \dots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ これを解くと, 任意の $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して, $a_i = 2i - 1$

証明したこと

任意の $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して, $E[\tau_{i,i+1}] = 2i - 1$



到達時刻：道の場合 (3) — 結論

- ▶ したがって, $a_i = E[\tau_{i,i+1}]$ と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \dots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

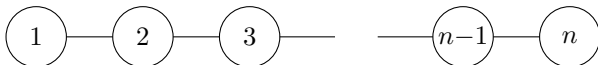
- ▶ これを解くと, 任意の $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して, $a_i = 2i - 1$

証明したこと

任意の $i \in \{1, \dots, n-1\}$ に対して, $E[\tau_{i,i+1}] = 2i - 1$

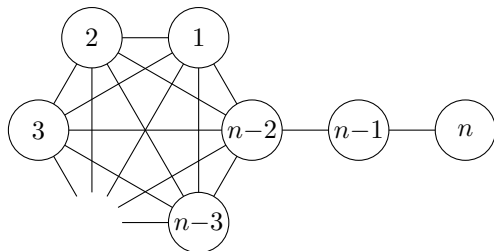
以上の考察をまとめると,

$$\begin{aligned} E[\tau_{1,n}] &= E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \cdots + E[\tau_{n-1,n}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) = (n - 1)^2 \end{aligned}$$



到達時刻：完全グラフ + 道の場合

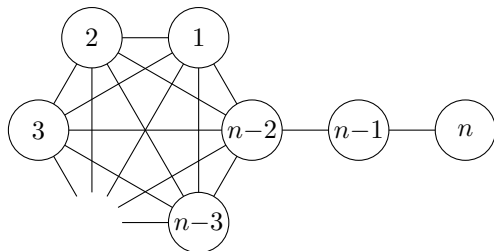
次のグラフを考える (頂点数 $n - 2$ の完全グラフに長さ 2 の道を追加,
 $n \geq 3$)



$E[\tau_{1,n}]$ を計算する

到達時刻：完全グラフ + 道の場合

次のグラフを考える (頂点数 $n - 2$ の完全グラフに長さ 2 の道を追加,
 $n \geq 3$)



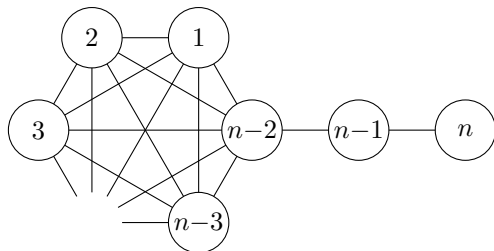
$E[\tau_{1,n}]$ を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n} = \tau_{1,n-2} + \tau_{n-2,n-1} + \tau_{n-1,n}$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合

次のグラフを考える (頂点数 $n - 2$ の完全グラフに長さ 2 の道を追加,
 $n \geq 3$)



$E[\tau_{1,n}]$ を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

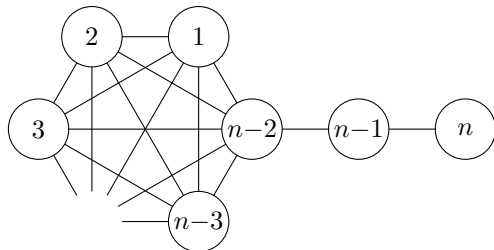
$$\tau_{1,n} = \tau_{1,n-2} + \tau_{n-2,n-1} + \tau_{n-1,n}$$

- ▶ したがって、期待値の線形性から

$$E[\tau_{1,n}] = E[\tau_{1,n-2}] + E[\tau_{n-2,n-1}] + E[\tau_{n-1,n}]$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合

次のグラフを考える (頂点数 $n - 2$ の完全グラフに長さ 2 の道を追加,
 $n \geq 3$)



$E[\tau_{1,n}]$ を計算する

- ▶ グラフの形状から次が分かる

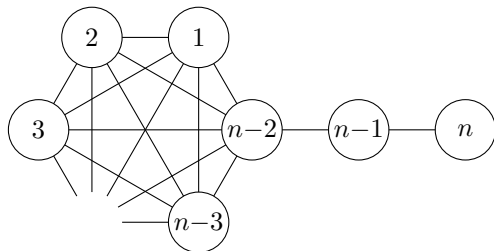
$$\tau_{1,n} = \tau_{1,n-2} + \tau_{n-2,n-1} + \tau_{n-1,n}$$

- ▶ したがって、期待値の線形性から

$$E[\tau_{1,n}] = E[\tau_{1,n-2}] + E[\tau_{n-2,n-1}] + E[\tau_{n-1,n}]$$

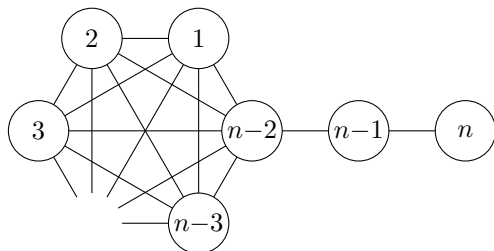
- ▶ つまり、 $E[\tau_{1,n-2}]$, $E[\tau_{n-2,n-1}]$, $E[\tau_{n-1,n}]$ が分かればよい

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (2)



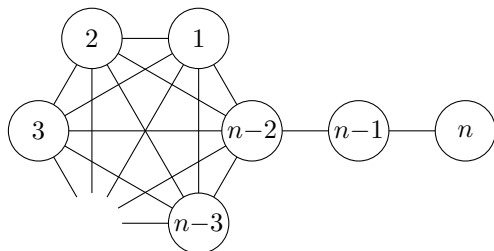
$$E[\tau_{1,n-2}] = \frac{1}{n-3} \cdot 1 + \frac{n-4}{n-3} \cdot (1 + E[\tau_{1,n-2}])$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (2)



$$\begin{aligned}
 E[\tau_{1,n-2}] &= \frac{1}{n-3} \cdot 1 + \frac{n-4}{n-3} \cdot (1 + E[\tau_{1,n-2}]) \\
 (n-3)E[\tau_{1,n-2}] &= n-3 + (n-4)E[\tau_{1,n-2}]
 \end{aligned}$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (2)

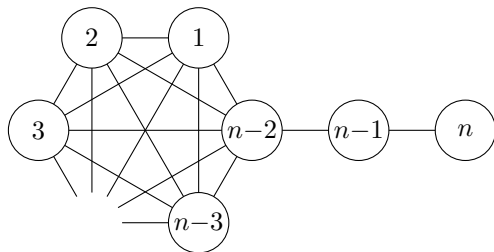


$$\mathbb{E}[\tau_{1,n-2}] = \frac{1}{n-3} \cdot 1 + \frac{n-4}{n-3} \cdot (1 + \mathbb{E}[\tau_{1,n-2}])$$

$$(n-3)\mathbb{E}[\tau_{1,n-2}] = n-3 + (n-4)\mathbb{E}[\tau_{1,n-2}]$$

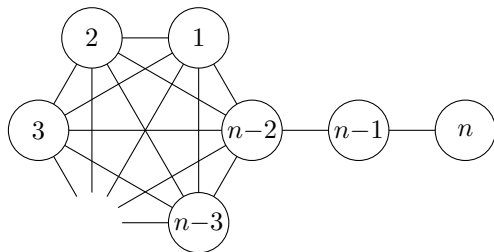
$$\therefore \mathbb{E}[\tau_{1,n-2}] = n-3$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)



$$\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] = \frac{1}{n-2} \cdot 1 + \frac{n-3}{n-2} (1 + \mathbf{E}[\tau_{1, n-2}] + \mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}])$$

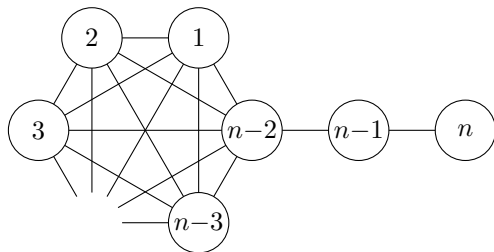
到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)



$$\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] = \frac{1}{n-2} \cdot 1 + \frac{n-3}{n-2} (1 + \mathbf{E}[\tau_{1, n-2}] + \mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}])$$

$$(n-2)\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] = n-2 + (n-3)\mathbf{E}[\tau_{1, n-2}] + (n-3)\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}]$$

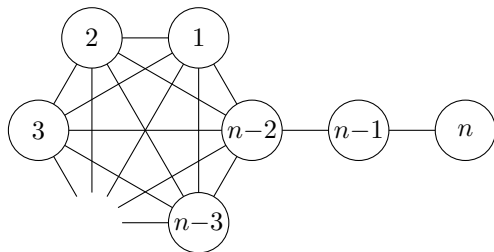
到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)



$$\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] = \frac{1}{n-2} \cdot 1 + \frac{n-3}{n-2} (1 + \mathbf{E}[\tau_{1, n-2}] + \mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}])$$

$$\begin{aligned} (n-2)\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] &= n-2 + (n-3)\mathbf{E}[\tau_{1, n-2}] + (n-3)\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] \\ &= n-2 + (n-3)^2 + (n-3)\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] \end{aligned}$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (3)

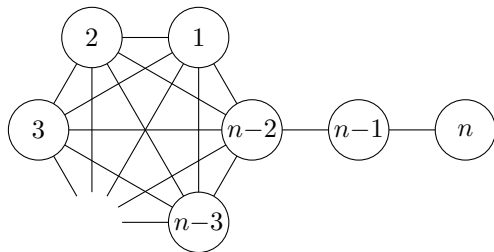


$$\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] = \frac{1}{n-2} \cdot 1 + \frac{n-3}{n-2} (1 + \mathbf{E}[\tau_{1, n-2}] + \mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}])$$

$$\begin{aligned} (n-2)\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] &= n-2 + (n-3)\mathbf{E}[\tau_{1, n-2}] + (n-3)\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] \\ &= n-2 + (n-3)^2 + (n-3)\mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] \end{aligned}$$

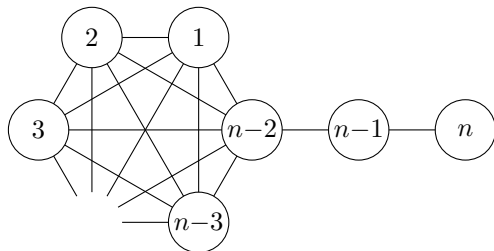
$$\therefore \mathbf{E}[\tau_{n-2, n-1}] = n-2 + (n-3)^2 = (n-2)(n-3) + 1$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)



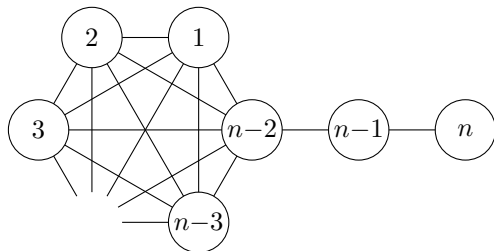
$$\mathbb{E}[\tau_{n-1,n}] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathbb{E}[\tau_{n-1,n}])$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)



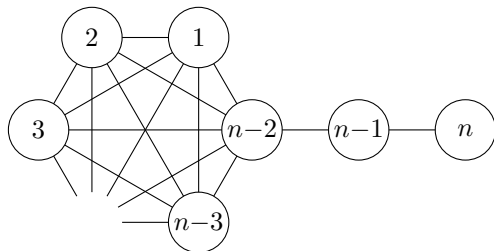
$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\tau_{n-1,n}] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathbb{E}[\tau_{n-1,n}]) \\
 2\mathbb{E}[\tau_{n-1,n}] &= 2 + \mathbb{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathbb{E}[\tau_{n-1,n}]
 \end{aligned}$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)



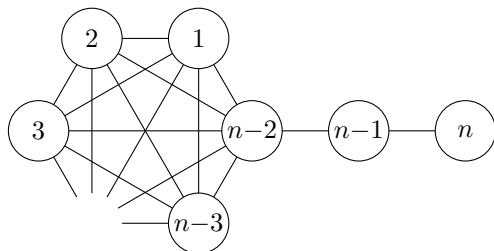
$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[\tau_{n-1,n}] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathbf{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathbf{E}[\tau_{n-1,n}]) \\
 2\mathbf{E}[\tau_{n-1,n}] &= 2 + \mathbf{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathbf{E}[\tau_{n-1,n}] \\
 &= 2 + (n-2)(n-3) + 1 + \mathbf{E}[\tau_{n-1,n}]
 \end{aligned}$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (4)



$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\tau_{n-1,n}] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathbb{E}[\tau_{n-1,n}]) \\
 2\mathbb{E}[\tau_{n-1,n}] &= 2 + \mathbb{E}[\tau_{n-2,n-1}] + \mathbb{E}[\tau_{n-1,n}] \\
 &= 2 + (n-2)(n-3) + 1 + \mathbb{E}[\tau_{n-1,n}] \\
 \therefore \mathbb{E}[\tau_{n-1,n}] &= (n-2)(n-3) + 3
 \end{aligned}$$

到達時刻：完全グラフ + 道の場合 (5)

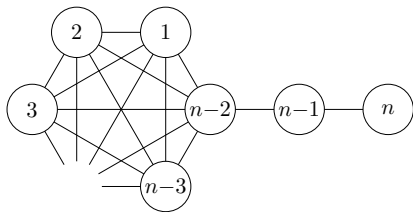


したがって,

$$\begin{aligned}
 E[\tau_{1,n}] &= E[\tau_{1,n-2}] + E[\tau_{n-2,n-1}] + E[\tau_{n-1,n}] \\
 &= (n-3) + ((n-2)(n-3) + 1) + ((n-2)(n-3) + 3) \\
 &= 2n^2 - 9n + 13
 \end{aligned}$$

到達時刻の比較

- ▶ 頂点数 n の道 :
到達時刻の期待値 $= (n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$
- ▶ 頂点数 $n-2$ の完全グラフ + 長さ 2 の道 :
到達時刻の期待値 $= 2n^2 - 9n + 13$



教訓 : 辺を多くすると, 到達時刻の期待値が増えることがある

目次

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- ▶ 「ギャンブラーの破産」において、破産確率を計算できる
- ▶ 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において、到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は

「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの

目次

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ