

# 離散数理工学 第 6 回

離散代数：有限群

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 11 月 16 日

最終更新：2021 年 11 月 8 日 13:21

### 今日の目標

有限群に関する基礎的な用語が使えるようになる

- ▶ 群の定義, 単位元, 逆元
- ▶ 群の表示
- ▶ 群の同型性, 準同型性

## 目次

- ① 群の定義
- ② 置換群再考
- ③ 群の表示
- ④ 群の同型性と準同型性
- ⑤ 今日のまとめ

## 群の例 (1) : 整数と加法

整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  は加法  $+$  に関して群となり, その群を  $(\mathbb{Z}, +)$  と表す

群表 (ケーリー表とも呼ばれる)

$+$	$\dots$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\dots$
$\vdots$											
$-4$	$\dots$	$-8$	$-7$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$\dots$
$-3$	$\dots$	$-7$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$\dots$
$-2$	$\dots$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$\dots$
$-1$	$\dots$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$\dots$
$0$	$\dots$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\dots$
$1$	$\dots$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$\dots$
$2$	$\dots$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$\dots$
$3$	$\dots$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$\dots$
$4$	$\dots$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$8$	$\dots$
$\vdots$											

## 群の構成要素

## 群は2つのものから定義される

- ▶ 集合  $G$
- ▶  $G$  上の演算  $\circ$ 
  - ▶  $x, y \in G$  に対する演算結果が  $x \circ y$
  - ▶ 演算は他の記号 (例えば,  $*$ ,  $\cdot$ ,  $\times$ ,  $+$  など) で表すことも多い
  - ▶  $x \circ y$  を単に  $xy$  と書くことも多い  
(今後これを用いることが多い)

ただし, この  $G$  と  $\circ$  は 次の条件 を満たす必要がある

この2つを組にして,  $(G, \circ)$  と群を表記する  
(「 $\circ$ 」を省略して, 「 $G$ 」だけで表記する場合も多い)

## 群の定義

## 定義：群とは？

集合  $G$  と  $G$  上の演算  $\circ$  の組  $(G, \circ)$  が **群** であるとは、次を満たすこと

- 1 ある要素  $e \in G$  が存在して、任意の  $x \in G$  に対して

$$x \circ e = e \circ x = x$$

- 2 任意の要素  $x \in G$  に対して、ある要素  $y \in G$  が存在して

$$x \circ y = y \circ x = e$$

- 3 演算  $\circ$  は次の **結合性** を満たす：任意の  $x, y, z \in G$  に対して

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

## 群の例 (1) : 整数と加法 — 1つ目の条件

整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  は加法  $+$  に関して群となり, その群を  $(\mathbb{Z}, +)$  と表す

		群表										
$+$	$\dots$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\dots$	
$\vdots$												
$-4$	$\dots$	$-8$	$-7$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$\dots$	
$-3$	$\dots$	$-7$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$\dots$	
$-2$	$\dots$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$\dots$	
$-1$	$\dots$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$\dots$	
$0$	$\dots$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\dots$	
$1$	$\dots$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$\dots$	
$2$	$\dots$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$\dots$	
$3$	$\dots$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$\dots$	
$4$	$\dots$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$8$	$\dots$	
$\vdots$												

## 群の例 (1) : 整数と加法 — 2つ目の条件

整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  は加法  $+$  に関して群となり, その群を  $(\mathbb{Z}, +)$  と表す

		群表									
$+$	$\dots$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\dots$
$\vdots$											
$-4$	$\dots$	$-8$	$-7$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$\dots$
$-3$	$\dots$	$-7$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$\dots$
$-2$	$\dots$	$-6$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$\dots$
$-1$	$\dots$	$-5$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$\dots$
$0$	$\dots$	$-4$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\dots$
$1$	$\dots$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$\dots$
$2$	$\dots$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$\dots$
$3$	$\dots$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$\dots$
$4$	$\dots$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$8$	$\dots$
$\vdots$											



## 群の定義：単位元と逆元

## 定義：群とは？

集合  $G$  と  $G$  上の演算  $\circ$  の組  $(G, \circ)$  が **群** であるとは、次を満たすこと

- 1 ある要素  $e \in G$  が存在して、任意の  $x \in G$  に対して

$$x \circ e = e \circ x = x$$

- 2 任意の要素  $x \in G$  に対して、ある要素  $y \in G$  が存在して

$$x \circ y = y \circ x = e$$

- 3 演算  $\circ$  は次の **結合性** を満たす：任意の  $x, y, z \in G$  に対して

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

## 群の定義：単位元と逆元

## 定義：群とは？

集合  $G$  と  $G$  上の演算  $\circ$  の組  $(G, \circ)$  が **群** であるとは、次を満たすこと

- 1 ある要素  $e \in G$  が存在して、任意の  $x \in G$  に対して

$$x \circ e = e \circ x = x$$

この  $e$  を  $G$  の **単位元** と呼ぶ

- 2 任意の要素  $x \in G$  に対して、ある要素  $y \in G$  が存在して

$$x \circ y = y \circ x = e$$

- 3 演算  $\circ$  は次の **結合性** を満たす：任意の  $x, y, z \in G$  に対して

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

## 群の定義：単位元と逆元

## 定義：群とは？

集合  $G$  と  $G$  上の演算  $\circ$  の組  $(G, \circ)$  が **群** であるとは、次を満たすこと

- 1 ある要素  $e \in G$  が存在して、任意の  $x \in G$  に対して

$$x \circ e = e \circ x = x$$

この  $e$  を  $G$  の **単位元** と呼ぶ

- 2 任意の要素  $x \in G$  に対して、ある要素  $y \in G$  が存在して

$$x \circ y = y \circ x = e$$

この  $y$  を  $G$  における  $x$  の **逆元** と呼び、 $x^{-1}$  で表すことが多い

- 3 演算  $\circ$  は次の **結合性** を満たす：任意の  $x, y, z \in G$  に対して

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

## 群ではない例

- 1 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  は乗法  $\times$  に関して群になる？
  - ▶ ならない (なぜ?)

## 群ではない例

- 1 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  は乗法  $\times$  に関して群になる？
  - ▶ ならない (なぜ?)
- 2 有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  は乗法  $\times$  に関して群になる？
  - ▶ ならない (なぜ?)

## 群ではない例

- 1 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  は乗法  $\times$  に関して群になる？
  - ▶ ならない (なぜ?)
- 2 有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  は乗法  $\times$  に関して群になる？
  - ▶ ならない (なぜ?)
- 3 実数全体の集合  $\mathbb{R}$  は減算  $-$  に関して群になる？
  - ▶ ならない (なぜ?)

## 群の例 (2)

$$G = \{x, y, z, w\}$$

群表

$\circ$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$	$x$	$y$	$z$	$w$
$y$	$y$	$z$	$w$	$x$
$z$	$z$	$w$	$x$	$y$
$w$	$w$	$x$	$y$	$z$

この表は次の関係を表している

$$\begin{array}{llll}
 x \circ x = x, & x \circ y = y, & x \circ z = z, & x \circ w = w, \\
 y \circ x = y, & y \circ y = z, & y \circ z = w, & y \circ w = x, \\
 z \circ x = z, & z \circ y = w, & z \circ z = x, & z \circ w = y, \\
 w \circ x = w, & w \circ y = x, & w \circ z = y, & w \circ w = z
 \end{array}$$

## 群の例 (2)

$$G = \{x, y, z, w\}$$

群表	$\circ$	$x$	$y$	$z$	$w$
	$x$	$x$	$y$	$z$	$w$
	$y$	$y$	$z$	$w$	$x$
	$z$	$z$	$w$	$x$	$y$
	$w$	$w$	$x$	$y$	$z$

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- ▶ 単位元は？
- ▶  $x$  の逆元は？  $y$  の逆元は？  $z$  の逆元は？  $w$  の逆元は？
- ▶ 結合性は？ (例えば,  $(y \circ w) \circ z \stackrel{?}{=} y \circ (w \circ z)$ )



## 群の例 (3)

$$G = \{x, y, z, w\}$$

群表

$\circ$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$	$x$	$y$	$z$	$w$
$y$	$y$	$x$	$w$	$z$
$z$	$z$	$w$	$x$	$y$
$w$	$w$	$z$	$y$	$x$

この表は次の関係を表している

$$\begin{array}{llll}
 x \circ x = x, & x \circ y = y, & x \circ z = z, & x \circ w = w, \\
 y \circ x = y, & y \circ y = x, & y \circ z = w, & y \circ w = z, \\
 z \circ x = z, & z \circ y = w, & z \circ z = x, & z \circ w = y, \\
 w \circ x = w, & w \circ y = z, & w \circ z = y, & w \circ w = x
 \end{array}$$

## 群の例 (3)

$$G = \{x, y, z, w\}$$

群表	$\circ$	$x$	$y$	$z$	$w$
	$x$	$x$	$y$	$z$	$w$
	$y$	$y$	$x$	$w$	$z$
	$z$	$z$	$w$	$x$	$y$
	$w$	$w$	$z$	$y$	$x$

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- ▶ 単位元は？
- ▶  $x$  の逆元は？  $y$  の逆元は？  $z$  の逆元は？  $w$  の逆元は？
- ▶ 結合性は？ (例えば,  $(y \circ w) \circ z \stackrel{?}{=} y \circ (w \circ z)$ )

## 群の例 (4)

$$G = \{e, a, b, x, y, z\}$$

群表

○	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>z</i>	<i>e</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>a</i>
<i>x</i>	<i>x</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>y</i>
<i>y</i>	<i>y</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>z</i>	<i>e</i>	<i>x</i>
<i>z</i>	<i>z</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>e</i>

この表は次の関係を表している

$$\begin{array}{llllll}
 e \circ e = e, & e \circ a = a, & e \circ b = b, & e \circ x = x, & e \circ y = y, & e \circ z = z, \\
 a \circ e = a, & a \circ a = x, & a \circ b = y, & a \circ x = e, & a \circ y = z, & a \circ z = b, \\
 b \circ e = b, & b \circ a = z, & b \circ b = e, & b \circ x = y, & b \circ y = x, & b \circ z = a, \\
 x \circ e = x, & x \circ a = e, & x \circ b = z, & x \circ x = a, & x \circ y = b, & x \circ z = y, \\
 y \circ e = y, & y \circ a = b, & y \circ b = a, & y \circ x = z, & y \circ y = e, & y \circ z = x, \\
 z \circ e = z, & z \circ a = y, & z \circ b = x, & z \circ x = b, & z \circ y = a, & z \circ z = e
 \end{array}$$

## 群の例 (4)

$$G = \{e, a, b, x, y, z\}$$

群表	○	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>b</i>
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>z</i>	<i>e</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>a</i>
	<i>x</i>	<i>x</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>y</i>
	<i>y</i>	<i>y</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>z</i>	<i>e</i>	<i>x</i>
	<i>z</i>	<i>z</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>e</i>

これが群であるための条件を満たしていることを確認

- ▶ 単位元は？
- ▶  $G$  の各要素の逆元は？
- ▶ 結合性は？ (例えば,  $(x \circ y) \circ z \stackrel{?}{=} x \circ (y \circ z)$ )

注意 :  $a \circ y \neq y \circ a$  (可換性を満たさない)

## アーベル群

定義：アーベル群とは？

群  $(G, \circ)$  が **アーベル群** であるとは、次の性質を満たすこと

$$\text{任意の } x, y \in G \text{ に対して, } x \circ y = y \circ x$$

この性質を **可換性 (交換性)** と呼ぶ

- ▶ アーベル群は **可換群** と呼ばれる
- ▶ アーベル群ではない場合、群は **非可換群** と呼ばれる

## 有限群と位数

定義：有限群とは？

群  $(G, \circ)$  が **有限群** であるとは、 $G$  の要素数が  $|G|$  が有限であること

定義：有限群の位数とは？

有限群  $(G, \circ)$  の **位数** とは、 $|G|$  のこと

今までの例

- ▶ 例 (1)：有限群ではない (アーベル群)
- ▶ 例 (2)：有限群であり、位数は 4 (アーベル群)
- ▶ 例 (3)：有限群であり、位数は 4 (アーベル群)
- ▶ 例 (4)：有限群であり、位数は 6 (非可換群)

この講義の焦点は有限群

## 群の要素の表記法

群  $(G, \circ)$ 

- ▶  $x \circ y$  とは書かずに,  $xy$  と書くことが多い
- ▶  $x \circ x$  とは書かずに,  $x^2$  と書くことが多い
- ▶  $(x \circ y) \circ z$  と  $x \circ (y \circ z)$  は同じなので, これらを  $x \circ y \circ z$  と書き, もっと省略して  $xyz$  と書くことが多い
- ▶  $xxx$  とは書かずに,  $x^3$  と書くことが多い
- ▶  $x$  を  $n$  個並べたものは  $x^n$  と書くことが多い
- ▶  $x$  の逆元は  $x^{-1}$  と書くことが多い
- ▶  $x^{-1}$  を  $n$  個並べたものは  $x^{-n}$  と書くことが多い
- ▶  $x^0$  は単位元  $e$  を表す

このとき, 次の指数法則が成り立つ

## 観察

任意の  $x \in G$  と任意の整数  $n, m$  に対して,  $x^n x^m = x^{n+m}$

## 練習問題

群  $G$ 

## 例題

任意の  $x, y \in G$  に対して,  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ 

証明 :

- ▶ 逆元の定義より,  $(xy)(xy)^{-1} = e$  (ただし,  $e$  は  $G$  の単位元)
- ▶ この式の両辺に左から  $x^{-1}$  をかけると

$$x^{-1}(xy)(xy)^{-1} = x^{-1}e$$

$$(x^{-1}x)y(xy)^{-1} = x^{-1}$$

$$y(xy)^{-1} = x^{-1}$$

- ▶ 今得られた式の両辺に左から  $y^{-1}$  をかけると

$$y^{-1}y(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

$$\therefore (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$





# 目次

① 群の定義

② 置換群再考

③ 群の表示

④ 群の同型性と準同型性

⑤ 今日のまとめ

## 復習：置換群とは？

有限集合  $X$ 

定義：置換群とは？

(復習)

 $X$  上の **置換群** とは,  $X$  上の置換の集合  $S$  で以下を満たすもの

- 1  $e \in S$  (恒等置換を持つ)
- 2  $\pi, \sigma \in S$  ならば  $\pi\sigma \in S$  (積で閉じている)
- 3  $\pi \in S$  ならば  $\pi^{-1} \in S$  (逆置換も持つ)

## 置換群は群

## 観察

置換群は写像の合成に関して群である

用語の対応

群	置換群
単位元	恒等置換
逆元	逆置換

## 置換群の群表 (1)

対称群  $S_3$  の群表

$\circ$	$e$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$e$	$e$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	$e$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$
$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$e$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$
$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$e$	$(1\ 3)$	$(1\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$e$
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$e$	$(1\ 2\ 3)$

## 置換群の群表 (2)

交代群  $A_3$  の群表

$\circ$	$e$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$e$	$e$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$e$
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$e$	$(1\ 2\ 3)$

交換群  $A_n$  とは, 要素数  $n$  の集合上の偶置換全体

# 目次

- ① 群の定義
- ② 置換群再考
- ③ 群の表示
- ④ 群の同型性と準同型性
- ⑤ 今日のまとめ

## 群の要素を作る

群  $G$ 

▶  $a \in G$  のとき,  $a^2 \in G, a^3 \in G, a^4 \in G, \dots$

▶  $a, b \in G$  のとき,  $ab \in G, a^2b \in G, aba \in G, \dots$

このように, 要素を並べることで,  $G$  の要素がどんどん作れる

## 群の表示：例 (3) を見て

$$G = \{x, y, z, w\}$$

群表

$\circ$	$x$	$y$	$z$	$w$
$x$	$x$	$y$	$z$	$w$
$y$	$y$	$x$	$w$	$z$
$z$	$z$	$w$	$x$	$y$
$w$	$w$	$z$	$y$	$x$

- ▶  $yz = w$  が成り立つ
- ▶ つまり,  $y$  と  $z$  があれば,  $w$  は復元できる ( $w$  はある意味で不要)
- ▶  $x$  は単位元 ( $e$  と書く)
- ▶  $y$  は  $y^2 = e$  を満たす
- ▶  $z$  は  $z^2 = e$  を満たす
- ▶  $y$  と  $z$  は  $yz = zy$  を満たす (書き換えると  $z^{-1}yzy^{-1} = e$ )



群の表示：例 (3) を見て

$$G = \{e, a, b, ab\}$$

	o	e	a	b	ab
	e	e	a	b	ab
群表	a	a	e	ab	b
	b	b	ab	e	a
	ab	ab	b	a	e

別の書き方 (群の表示と呼ばれる) :

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle$$

### 読み方

- ▶ 「 $a, b$ 」を並べることで  $G$  の要素はすべて表現できる
- ▶ 並べたとき, 「 $a^2 = b^2 = e, ab = ba$ 」と置き換えてよい
- ▶ 置き換える規則は, これら (から導かれるもの) 以外にない

### 用語

- ▶  $\{a, b\}$  は  $G$  の **生成系**, 「 $a^2 = b^2 = e, ab = ba$ 」は **関係式**

群の表示：例 (3) を見て

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle$$

簡約の例

$$\begin{aligned} ab^3a^3b &= abbbaaab \\ &= a(bb)b(aa)ab \\ &= aebeab \\ &= abab \\ &= a(ba)b \\ &= a(ab)b \\ &= aabb \\ &= ee \\ &= e \end{aligned}$$

## 群の表示：群の例 (2)

$$G = \{x, y, z, w\}$$

群表	$\circ$	$x$	$y$	$z$	$w$
	$x$	$x$	$y$	$z$	$w$
	$y$	$y$	$z$	$w$	$x$
	$z$	$z$	$w$	$x$	$y$
	$w$	$w$	$x$	$y$	$z$

## 関係式

- ▶ 単位元は  $x$  ( $e$  と書くことにする)
- ▶  $y^2 = z$ ,  $y^3 = zy = w$  ( $y$  があれば,  $z$  と  $w$  は表現できる)
- ▶  $y^4 = wy = e$

## 群の表示：群の例 (2)

$$G = \{e, a, a^2, a^3\}$$

群表	○	e	a	$a^2$	$a^3$
	e	e	a	$a^2$	$a^3$
	a	a	$a^2$	$a^3$	e
	$a^2$	$a^2$	$a^3$	e	a
	$a^3$	$a^3$	e	a	$a^2$

## 群の表示

$$\langle a \mid a^4 = e \rangle$$

## 群の表示：群の例 (4)

$$G = \{e, a, b, x, y, z\}$$

群表	o	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>b</i>
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>z</i>	<i>e</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>a</i>
	<i>x</i>	<i>x</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>y</i>
	<i>y</i>	<i>y</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>z</i>	<i>e</i>	<i>x</i>
	<i>z</i>	<i>z</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>e</i>

## 関係式

- ▶  $a^2 = x, ab = y, ba = z$  ( $a, b$ があれば,  $x, y, z$  は表現できる)
- ▶  $a^3 = e, b^2 = e, abab = e$

## 群の表示：群の例 (4)

$$G = \{e, a, b, a^2, ab, ba\}$$

群表	○	$e$	$a$	$b$	$a^2$	$ab$	$ba$
	$e$	$e$	$a$	$b$	$a^2$	$ab$	$ba$
	$a$	$a$	$a^2$	$ab$	$e$	$ba$	$b$
	$b$	$b$	$ba$	$e$	$ab$	$a^2$	$a$
	$a^2$	$a^2$	$e$	$ba$	$a$	$b$	$ab$
	$ab$	$ab$	$b$	$a$	$ba$	$e$	$a^2$
	$ba$	$ba$	$ab$	$a^2$	$b$	$a$	$e$

## 群の表示

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$$

## 群の表示：群の例 (4)

## 群の表示

$$G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$$

## 簡約の例

$$\begin{aligned} aba &= ababb \\ &= (abab)b \\ &= eb \\ &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2ba^2b &= aabaab \\ &= aabaeb \\ &= aababbab \\ &= a(abab)bab \\ &= aebab \\ &= abab \\ &= e \end{aligned}$$

# 目次

- ① 群の定義
- ② 置換群再考
- ③ 群の表示
- ④ 群の同型性と準同型性
- ⑤ 今日のまとめ



## 対称群の表示 (1)

対称群  $S_3$  の群表

$\circ$	$e$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$e$	$e$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	$e$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$
$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$e$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$
$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$e$	$(1\ 3)$	$(1\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$e$
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$e$	$(1\ 2\ 3)$

 $S_3$  の表示は？

## 対称群の表示 (続き)

## 1 つの表示法

$\circ$	$e$	$a$	$b$	$bab$	$ba$	$ab$
$e$	$e$	$a$	$b$	$bab$	$ba$	$ab$
$a$	$a$	$e$	$ab$	$ba$	$bab$	$b$
$b$	$b$	$ba$	$e$	$ab$	$a$	$bab$
$bab$	$bab$	$ab$	$ba$	$e$	$b$	$a$
$ba$	$ba$	$b$	$bab$	$a$	$ab$	$e$
$ab$	$ab$	$bab$	$a$	$b$	$e$	$ba$

つまり,

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$$

## 対称群の表示 (続き)

## 別の表示法

$\circ$	$e$	$x$	$yx$	$xy$	$y$	$y^2$
$e$	$e$	$x$	$yx$	$xy$	$y$	$y^2$
$x$	$x$	$e$	$y^2$	$y$	$xy$	$yx$
$yx$	$yx$	$y$	$e$	$y^2$	$x$	$xy$
$xy$	$xy$	$y^2$	$y$	$e$	$yx$	$x$
$y$	$y$	$yx$	$xy$	$x$	$y^2$	$e$
$y^2$	$y^2$	$xy$	$x$	$yx$	$e$	$y$

つまり,

$$\langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$$

## 対称群の表示：ここまでのまとめ

3 次の対称群  $S_3$  に対して, 2 つの表示が得られた

- ▶  $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$
- ▶  $\langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$

別の言い方をすると

- ▶ この 2 つの有限群は 3 次の対称群と 同型 である  
同型な群は, 本質的に「同じ」である

## 群の準同型性と同型性

群  $(G, \circ)$  と群  $(H, \star)$ 

定義：群準同型写像とは？

$(G, \circ)$  から  $(H, \star)$  への **群準同型写像** とは、  
写像  $\phi: G \rightarrow H$  で、次を満たすもの

$$\text{任意の } x, y \in G \text{ に対して, } \phi(x \circ y) = \phi(x) \star \phi(y)$$

定義：群同型写像とは？

$(G, \circ)$  から  $(H, \star)$  への **群同型写像** とは、  
 $(G, \circ)$  から  $(H, \star)$  への群準同型写像で、全単射であるもの

$(G, \circ)$  から  $(H, \star)$  への群同型写像が存在するとき、  
 $(G, \circ)$  と  $(H, \star)$  は **同型** であるという

## 対称群の表示：同型写像 (1)

3 次の対称群  $S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$  に対して,  
2 つの表示が得られた

$$\blacktriangleright G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$$

$$\blacktriangleright H = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$$

写像  $\phi: S_3 \rightarrow G$  として次を考える

$$\begin{aligned} \phi(e) &= e, & \phi((1\ 2)) &= a, & \phi((1\ 3)) &= b, \\ \phi((2\ 3)) &= bab, & \phi((1\ 2\ 3)) &= ba, & \phi((1\ 3\ 2)) &= ab \end{aligned}$$

この  $\phi$  は同型写像である。例えば

$$\phi((1\ 2)(1\ 3)) = \phi((1\ 3\ 2)) = ab = \phi((1\ 2))\phi((1\ 3))$$

## 対称群の表示：同型写像であることの確認 (1)

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$$

同型写像であることを確認するためには

関係式を満たすことが確認できればよい

写像  $\phi: S_3 \rightarrow G$  として次を考える

$$\begin{aligned} \phi(e) &= e, & \phi((1\ 2)) &= a, & \phi((1\ 3)) &= b, \\ \phi((2\ 3)) &= bab, & \phi((1\ 2\ 3)) &= ba, & \phi((1\ 3\ 2)) &= ab \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned} a^2 &= \phi((1\ 2))\phi((1\ 2)) = \phi((1\ 2)(1\ 2)) = \phi(e) = e, \\ b^2 &= \phi((1\ 3))\phi((1\ 3)) = \phi((1\ 3)(1\ 3)) = \phi(e) = e, \\ ababab &= \phi((1\ 2))\phi((1\ 3))\phi((1\ 2))\phi((1\ 3))\phi((1\ 2))\phi((1\ 3)) \\ &= \phi((1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3)) \\ &= \phi((1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)) = \phi(e) = e \end{aligned}$$

## 対称群の表示 : 同型写像 (2)

3 次の対称群  $S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$  に対して,  
2 つの表示が得られた

$$\blacktriangleright G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$$

$$\blacktriangleright H = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$$

写像  $\psi: S_3 \rightarrow H$  として次を考える

$$\begin{aligned} \psi(e) &= e, & \psi((1\ 2)) &= x, & \psi((1\ 3)) &= yx, \\ \psi((2\ 3)) &= xy, & \psi((1\ 2\ 3)) &= y, & \psi((1\ 3\ 2)) &= y^2 \end{aligned}$$

この  $\psi$  は同型写像である. (証明は演習問題)



## 群準同型の性質：単位元

群  $(G, \circ)$  と群  $(H, \star)$ , 群準同型  $\phi: G \rightarrow H$

## 性質：群準同型の性質 (1)

$G$  の単位元  $e_G$ ,  $H$  の単位元  $e_H$  に対して,

$$\phi(e_G) = e_H$$

証明：群準同型の定義より

$$\begin{aligned}\phi(e_G) &= \phi(e_G \circ e_G) = \phi(e_G) \star \phi(e_G) \\ \therefore \phi(e_G) \star \phi(e_G)^{-1} &= \phi(e_G) \star \phi(e_G) \star \phi(e_G)^{-1} \\ \therefore e_H &= \phi(e_G)\end{aligned}$$

□

## 群準同型の性質：逆元

群  $(G, \circ)$  と群  $(H, \star)$ , 群準同型  $\phi: G \rightarrow H$

性質：群準同型の性質 (2)

任意の  $x \in G$  に対して

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$$

証明：演習問題

# 目次

- ① 群の定義
- ② 置換群再考
- ③ 群の表示
- ④ 群の同型性と準同型性
- ⑤ 今日のまとめ

## 今日の目標

## 今日の目標

有限群に関する基礎的な用語が使えるようになる

- ▶ 群の定義, 単位元, 逆元
- ▶ 群の表示
- ▶ 群の同型性, 準同型性

## 次回の予告

有限群の応用として, 次を扱う

- ▶ 15 パズル
- ▶ タイリング

## 目次

- ① 群の定義
- ② 置換群再考
- ③ 群の表示
- ④ 群の同型性と準同型性
- ⑤ 今日のまとめ