

離散数理工学 第 4 回

数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 11 月 2 日

最終更新：2021 年 10 月 25 日 09:44

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ より複雑な漸化式の解法

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ カタラン数：漸化式を立てる
- ⑥ [上級] カタラン数：漸化式を解く
- ⑦ 今日のまとめ

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

仮定

この冪級数は収束する

▶ 特に, ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする

▶ つまり, $|x| < r$ のとき, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので, 『微分積分学』, 『解析学』, 『複素関数論』の知識が使える

代表的な数列の母関数

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$	一般項 a_n	母関数 $A(x)$
$1, 1, 1, 1, \dots$	1	$\frac{1}{1-x}$
$1, 2, 4, 8, \dots$	2^n	$\frac{1}{1-2x}$
$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$	α^n	$\frac{1}{1-\alpha x}$
$0, 1, 2, 3, \dots$	n	$\frac{x}{(1-x)^2}$

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ カタラン数 : 漸化式を立てる
- ⑥ [上級] カタラン数 : 漸化式を解く
- ⑦ 今日のまとめ

例：2 段の格子 — まとめ (第 2 回講義より)

$a_n =$ グラフ A_n における完全マッチングの総数 とするとき

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- ▶ 特性方程式を用いた方法 (前回)
- ▶ 行列を用いた方法 (前回)
- ▶ 母関数を用いた方法 (今回)

母関数を用いた漸化式の解法

0 a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いた漸化式の解法

0 a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

▶ このとき, $a_2 = 2 = 1 + 1 = a_1 + a_0$

母関数を用いた漸化式の解法

0 a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- ▶ このとき, $a_2 = 2 = 1 + 1 = a_1 + a_0$
- ▶ つまり, 上の漸化式は $n \geq 2$ において成立

書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$
$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= x(A(x) - 1) + x^2 A(x) \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

$$= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$$

$$= x(A(x) - 1) + x^2 A(x) = xA(x) - x + x^2 A(x)$$

母関数を用いた漸化式の解法

- 3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 - x = xA(x) - x + x^2A(x)$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\ \therefore (x^2 + x - 1)A(x) &= -1 \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\ \therefore (x^2 + x - 1)A(x) &= -1 \\ \therefore A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - x &= xA(x) - x + x^2A(x) \\ \therefore (x^2 + x - 1)A(x) &= -1 \\ \therefore A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

このとき, $\frac{-1}{x^2 + x - 1}$ の部分分数分解が必要

- ▶ 「分母 = 0」を x について解くと, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる
- ▶ したがって, ある定数 a, b が存在して

$$\frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{a}{x - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

- ▶ この a, b を定める (次のページ)

母関数を用いた漸化式の解法

$\alpha_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ とすると, $x^2 + x - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ なので,

$$\frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{a}{x - \alpha_1} + \frac{b}{x - \alpha_2}$$

母関数を用いた漸化式の解法

$\alpha_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ とすると, $x^2 + x - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{-1}{x^2 + x - 1} &= \frac{a}{x - \alpha_1} + \frac{b}{x - \alpha_2} \\ \therefore -1 &= a(x - \alpha_2) + b(x - \alpha_1)\end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

$\alpha_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ とすると, $x^2 + x - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x^2 + x - 1} &= \frac{a}{x - \alpha_1} + \frac{b}{x - \alpha_2} \\ \therefore -1 &= a(x - \alpha_2) + b(x - \alpha_1) \end{aligned}$$

この式は, 任意の x で成り立つから,

- ▶ $x = \alpha_1$ とすると, $-1 = a(\alpha_1 - \alpha_2)$
- ▶ $x = \alpha_2$ とすると, $-1 = b(\alpha_2 - \alpha_1)$

母関数を用いた漸化式の解法

$\alpha_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ とすると, $x^2 + x - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x^2 + x - 1} &= \frac{a}{x - \alpha_1} + \frac{b}{x - \alpha_2} \\ \therefore -1 &= a(x - \alpha_2) + b(x - \alpha_1) \end{aligned}$$

この式は, 任意の x で成り立つから,

- ▶ $x = \alpha_1$ とすると, $-1 = a(\alpha_1 - \alpha_2)$
- ▶ $x = \alpha_2$ とすると, $-1 = b(\alpha_2 - \alpha_1)$

したがって, $a = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$A(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_2}$$



母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_2} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_2}}
 \end{aligned}$$



母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_2} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_2}} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n x^n
 \end{aligned}$$



母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_2} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_2}} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \right) x^n
 \end{aligned}$$

□

母関数を用いた漸化式の解法

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{x - \alpha_2} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_2}} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \right) x^n
 \end{aligned}$$

したがって, 任意の $n \geq 0$ に対して,

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

□

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ カタラン数 : 漸化式を立てる
- ⑥ [上級] カタラン数 : 漸化式を解く
- ⑦ 今日のまとめ

例題 1

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 1 : 直感を得る

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ $a_1 = 3$
- ▶ $a_2 = 4a_1 - 3^{2-1} = 4 \cdot 3 - 3^1 = 12 - 3 = 9$
- ▶ $a_3 = 4a_2 - 3^{3-1} = 4 \cdot 9 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- ▶ $a_4 = 4a_3 - 3^{4-1} = 4 \cdot 27 - 3^3 = 108 - 27 = 81$
- ▶ ...

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 0

0 a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 0

0 a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 0

0 a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

▶ このとき, $a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 0

0 a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

▶ このとき, $a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$

したがって, 考えている漸化式は次のように書き換えられる

例題 1 : 書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて, 級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$a_n = 4a_{n-1} - 3^{n-1}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて, 級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore a_n x^n &= 4a_{n-1} x^n - 3^{n-1} x^n \end{aligned}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore a_n x^n &= 4a_{n-1} x^n - 3^{n-1} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore a_n x^n &= 4a_{n-1} x^n - 3^{n-1} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1\end{aligned}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1$$

$$\text{右辺} = \sum_{n \geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3^n x^{n+1}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x \sum_{n \geq 0} a_n x^n - x \sum_{n \geq 0} (3x)^n \end{aligned}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x \sum_{n \geq 0} a_n x^n - x \sum_{n \geq 0} (3x)^n \\ &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \end{aligned}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 = 4xA(x) - \frac{x}{1 - 3x}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 = 4xA(x) - \frac{x}{1 - 3x}$$

$$\therefore (1 - 4x)A(x) = 1 - \frac{x}{1 - 3x}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 = 4xA(x) - \frac{x}{1-3x}$$

$$\therefore (1-4x)A(x) = 1 - \frac{x}{1-3x}$$

$$\therefore A(x) = \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned}
 A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)}
 \end{aligned}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned}
 A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-4x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x}
 \end{aligned}$$

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned}
 A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\
 \therefore A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\
 &= \frac{1-4x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x}
 \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$



例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1 - 3x}$$

したがって,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$



例題 1 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

したがって, 任意の $n \geq 0$ に対して

$$a_n = 3^n$$



例題 2

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 2 : 直感を得る

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ $a_0 = 1$
- ▶ $a_1 = 3a_0 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- ▶ $a_2 = 3a_1 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$
- ▶ $a_3 = 3a_2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 3 = 63$
- ▶ $a_4 = 3a_3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 63 + 2 \cdot 4 = 197$
- ▶ ...

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて, 級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore a_n x^n &= 3a_{n-1} x^n + 2n x^n \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore a_n x^n &= 3a_{n-1} x^n + 2n x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore a_n x^n &= 3a_{n-1} x^n + 2n x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1\end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1$$

$$\text{右辺} = \sum_{n \geq 0} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} (2n + 2) x^{n+1}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1$$

$$\text{右辺} = \sum_{n \geq 0} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} (2n + 2)x^{n+1}$$

$$= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\text{右辺} = 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + 2x \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + 2x \frac{1}{1-x} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + 2x \frac{1}{1-x} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 = 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$A(x) - 1 = 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2}$$

$$\therefore (1-3x)A(x) = 1 + \frac{2x}{(1-x)^2}$$

$$\therefore A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned}A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}\end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

部分分数分解を試みる, つまり

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

となる a, b, c が一意に存在するので, それを定める (次のページ)

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

\therefore

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned}\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2\end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$
$$\therefore 2x = a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2$$

この式は任意の x に対して成り立つから

- ▶ $x = 0$ とすると, $0 = a + c$
- ▶ $x = 1$ とすると, $2 = -2b$
- ▶ $x = \frac{1}{3}$ とすると, $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}c$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

$$\therefore 2x = a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2$$

この式は任意の x に対して成り立つから

- ▶ $x = 0$ とすると, $0 = a + c$
- ▶ $x = 1$ とすると, $2 = -2b$
- ▶ $x = \frac{1}{3}$ とすると, $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}c$

したがって, $a = -\frac{3}{2}, b = -1, c = \frac{3}{2}$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
 &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
 &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nx^n
 \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
 &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} - n \right) x^n
 \end{aligned}$$

例題 2 : 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって,

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
 &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} - n \right) x^n
 \end{aligned}$$

したがって, 任意の $n \geq 0$ に対して, $a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$

□

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ カタラン数 : 漸化式を立てる
- ⑥ [上級] カタラン数 : 漸化式を解く
- ⑦ 今日のまとめ

例題 3

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解きたい

例題 3

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解きたい

問題点

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束しない

実際, $n \geq 1$ のとき, $a_n = na_{n-1} + 3n - 2 > na_{n-1}$ であるので,

$$\left| \frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}} \right| > n|x|$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 1 の前に

a_n の代わりに, 次の b_n を考える

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

そして, b_n の母関数 $B(x)$ を考える

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

- ▶ $B(x)$ を, 数列 a_0, a_1, a_2, \dots の**指数型母関数**と呼ぶことがある
- ▶ 一方で, $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を, 数列 a_0, a_1, a_2, \dots の**通常型母関数**と呼ぶことがある

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 1 の前に

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\downarrow \quad b_n = \frac{a_n}{n!} \quad \downarrow$$

例題 3 : 書き換え

$$b_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{na_{n-1}}{n!} + \frac{3n}{n!} - \frac{2}{n!} = b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$b_n = b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!}$$

$$\therefore b_n x^n = b_{n-1} x^n + \frac{3}{(n-1)!} x^n - \frac{2}{n!} x^n$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $B(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $B(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n - \frac{2}{0!} \right)$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $B(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n - \frac{2}{0!} \right) \\ &= xB(x) + 3xe^x - 2e^x + 2 \end{aligned}$$

復習 : テイラー展開

$$\text{任意の実数 } x \text{ に対して } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $B(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned}
 B(x) - 4 &= xB(x) + 3xe^x - 2e^x + 2 \\
 \therefore (1-x)B(x) &= 3xe^x - 2e^x + 6 \\
 \therefore B(x) &= \frac{3x}{1-x}e^x - \frac{2}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\
 &= \frac{-3(1-x) + 3}{1-x}e^x - \frac{2}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\
 &= -3e^x + \frac{1}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x}
 \end{aligned}$$

$B(x)$ を x の関数として表現できた

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$B(x) = -3e^x + \frac{1}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x}$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$\begin{aligned} B(x) &= -3e^x + \frac{1}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\ &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^\ell \right) + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$\begin{aligned}
 B(x) &= -3e^x + \frac{1}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\
 &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^\ell \right) + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n
 \end{aligned}$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$\begin{aligned}
 B(x) &= -3e^x + \frac{1}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\
 &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^\ell \right) + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + 6 \right) x^n
 \end{aligned}$$

したがって、任意の $n \geq 0$ に対して、 $b_n = 6 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$

例題 3 : 母関数を用いた解法 まとめ

 b_n の一般項

$$\text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して, } b_n = 6 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$$

$$\downarrow \quad b_n = \frac{a_n}{n!} \quad \downarrow$$

 a_n の一般項

$$\text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して, } a_n = 6n! + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} - 3$$

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ カタラン数：漸化式を立てる**
- ⑥ [上級] カタラン数：漸化式を解く
- ⑦ 今日のまとめ

カタラン数

定義：カタラン数とは？（復習）

自然数 $n \geq 0$ に対して、**第 n カタラン数** C_n とは、

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- ▶ $C_0 = \frac{1}{0+1} \binom{2 \cdot 0}{0} = \frac{1}{1} \binom{0}{0} = 1 \cdot 1 = 1$
- ▶ $C_1 = \frac{1}{1+1} \binom{2 \cdot 1}{1} = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
- ▶ $C_2 = \frac{1}{2+1} \binom{2 \cdot 2}{2} = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$
- ▶ $C_3 = \frac{1}{3+1} \binom{2 \cdot 3}{3} = \frac{1}{4} \binom{6}{3} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$
- ▶ $C_4 = \frac{1}{4+1} \binom{2 \cdot 4}{4} = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot 70 = 14$
- ▶ $C_5 = \frac{1}{5+1} \binom{2 \cdot 5}{5} = \frac{1}{6} \binom{10}{5} = \frac{1}{6} \cdot 252 = 42$

カタラン数の組合せ的解釈 (1)：入れ子状の括弧列

自然数 $n \geq 1$

性質：カタラン数と入れ子状の括弧列

 $C_n = 2n$ 個の括弧の列で、入れ子状になっているもの

入れ子状 = 左右の対応が取れている

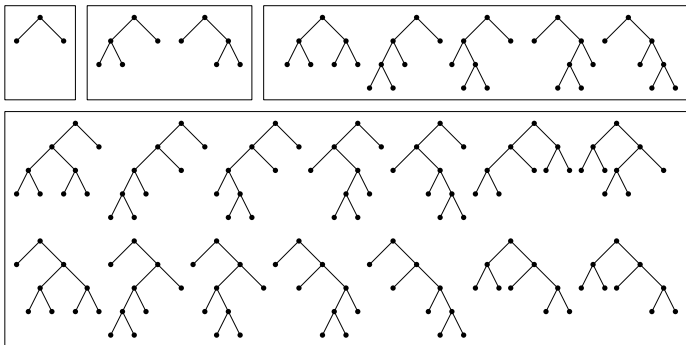
()	() ()	() () ()	() () ()	() (())	(()) ()	(()) ()
-----	---------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

() () () ()	() (()) ()	() () (())	() ((()))	() (() ())	(()) () ()	(()) (())
((())) ()	(() ()) ()	(() () ())	((()) ())	(() (()))	((() ()))	(((())))

カタラン数の組合せ的解釈 (2)：全二分木の総数

自然数 $n \geq 1$

性質：カタラン数と全二分木

 $C_n =$ 葉の数が $n + 1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数

全二分木 = 葉以外の頂点には子がちょうど2つ

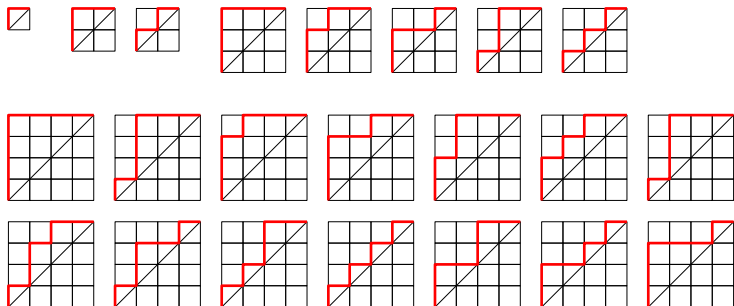
順序付き = 左右を区別する, ラベルなし = 頂点・辺にラベル(名)がない

カタラン数の組合せ的解釈 (3) : ディック道

定義：ディック道 (Dyck path) とは？

ディック道 とは, $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道で,
直線 $y = x$ の下側を通らないもの

$C_n = (0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数



なぜカタラン数がこれらを数えるのか？

カタラン数が数えるもの

- ▶ 入れ子状の括弧列
- ▶ 全二分木 (順序付きラベルなし)
- ▶ ディック道
- ▶ ...

疑問

カタラン数は なぜ これらを数えるのか？

今から行うこと：カタラン数の漸化式を導出すること

カタラン数の漸化式

性質：カタラン数の漸化式

カタラン数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

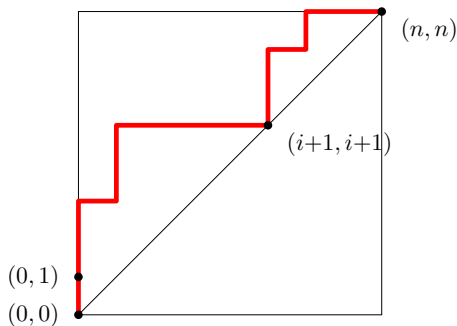
- ▶ $C_1 = C_0 C_0 = 1 \cdot 1 = 1$
- ▶ $C_2 = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$
- ▶ $C_3 = C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- ▶ $C_4 = C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$

証明のアイデア：組合せ的解釈を用いる

カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (1)

証明 : $n \geq 1$ のとき

- ▶ 「はじめの一步」は必ず「上」
- ▶ $(0, 0)$ の他に, はじめて直線 $y = x$ 上に来るときを考える
- ▶ その点を $(i + 1, i + 1)$ とする
($i \in \{0, \dots, n - 1\}$)



カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (2)

証明 (続き) :

- ▶ $(i+1, i+1)$ に来る直前に, 必ず $(i, i+1)$ にいる
- ▶ つまり, 考えているディック道は以下の形をしている

1 $(0, 0)$ から $(0, 1)$ に至る

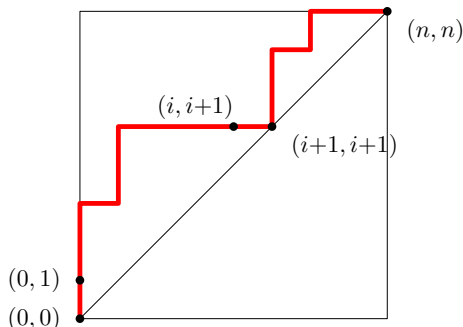
(← 1 通り)

2 $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る

3 $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る

(← 1 通り)

4 $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る



カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (3)

証明 (続き) :

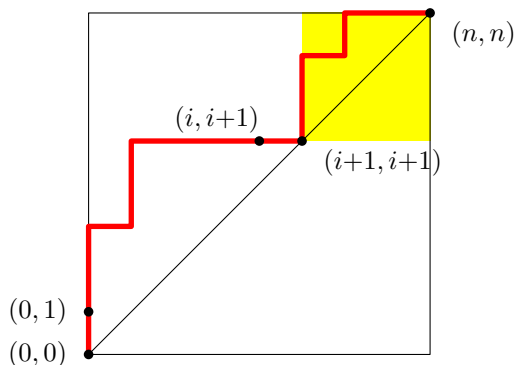
4 $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る
この間に $y = x$ より下に行かないので,

このような
経路の総数

=

$(0, 0)$ から $(n-i-1, n-i-1)$ に至る
ディック道の総数

=

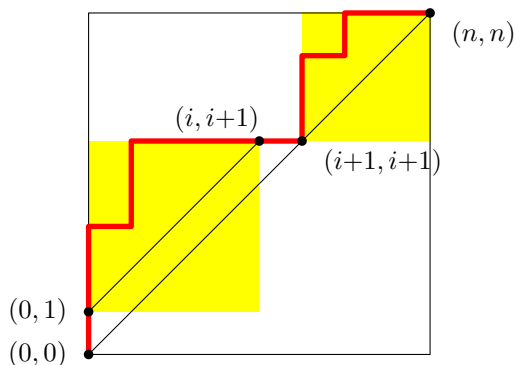
 C_{n-i-1}


カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (4)

証明 (続き) :

2 $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る
この間に $y = x$ 上に来ないので,

$$\boxed{\text{このような経路の総数}} = \boxed{(0, 0) \text{ から } (i, i) \text{ に至るディック道の総数}} = \boxed{C_i}$$



カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (5)

証明 (続き) :

- ▶ $(i+1, i+1)$ に来る直前に, 必ず $(i, i+1)$ にいる
- ▶ つまり, 考えているディック道は以下の形をしている
 - 1 $(0, 0)$ から $(0, 1)$ に至る (\leftarrow 1 通り)
 - 2 $(0, 1)$ から $(i, i+1)$ に至る ($\leftarrow C_i$ 通り)
 - 3 $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る (\leftarrow 1 通り)
 - 4 $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る ($\leftarrow C_{n-i-1}$ 通り)

したがって,
$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

□

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ カタラン数：漸化式を立てる
- ⑥ [上級] カタラン数：漸化式を解く
- ⑦ 今日のまとめ

カタラン数の漸化式

性質：カタラン数の漸化式

カタラン数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

今から行うこと：この漸化式を解くこと \rightsquigarrow 母関数を用いる方法

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n x^n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n$$

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n x^n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1})$$

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n x^n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1})$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)$$

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$$

$$C_n x^n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1})$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)$$

母関数を $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ と書くことにする

カタラン数：母関数による解法 Step 2

2 各辺を $C(x)$ によって表す

$$\text{左辺} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 = C(x) - 1$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\ &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n\end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned}
 \text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j}
 \end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned}
 \text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
 &= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j
 \end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\
&= x \left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j \right)
\end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
&= x \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\
&= x \left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j \right) = x C(x)^2
\end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 3

3 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$C(x) - 1 = xC(x)^2$$

カタラン数：母関数による解法 Step 3

3 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned}C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\ xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0\end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 3

3 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned}C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0 \\C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}\end{aligned}$$

どちらが正しいのか？

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで, $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$ なので,

▶ $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると,

▶ $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると,

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで, $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$ なので,

▶ $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$$

となり, 合わない

▶ $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると,

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで, $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$ なので,

▶ $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$$

となり, 合わない

▶ $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 4x)}{2x(1 + \sqrt{1 - 4x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}} = 1$$

となり, 合う

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで, $\lim_{x \rightarrow 0} C(x) = C_0 = 1$ なので,

▶ $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \infty$$

となり, 合わない

▶ $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ だとすると,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 4x)}{2x(1 + \sqrt{1 - 4x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}} = 1$$

となり, 合う

したがって, $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ である

母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$
$$xC(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

$$xC(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

ここで, $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ なので,

$$xC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$$

つまり, $xC(x)$ は次の数列 $\{a_n\}$ の母関数

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ C_{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

まずは, $xC(x)$ の級数展開を導く

母関数を用いた漸化式の解法

補題 (テイラー展開を使うことで証明できる (証明は省略))

任意の実数 α に対して, $|z| < 1$ であるとき,

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

ただし,

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち, $\alpha = 1/2$, $z = -4x$ とすれば, 次が得られる

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$\begin{aligned}
\therefore xC(x) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n \right) x^n
\end{aligned}$$

したがって、

$$\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して } C_{n-1} = -\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n$$

整理

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \binom{1/2}{n} (-4)^n &= -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-4)^n \\
&= -\frac{1}{2} \frac{-2(-2+4)(-2+8)\cdots(-2+4n-4)}{n!} \\
&= \frac{2 \cdot 6 \cdots (4n-6)}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(n-1)!} \\
&= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n!} \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)}{(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

まとめ

以上の議論より、任意の $n \geq 1$ に対して、

$$C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

つまり、次の公式が得られる

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ カタラン数 : 漸化式を立てる
- ⑥ [上級] カタラン数 : 漸化式を解く
- ⑦ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ より複雑な漸化式の解法

注意

今日扱ったのは、母関数に関する初歩

- ▶ 母関数にまつわる理論は膨大
- ▶ 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長

そこでは、『複素関数論』が重要な役割を果たす

目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 母関数が収束しない場合
- ⑤ カタラン数：漸化式を立てる
- ⑥ [上級] カタラン数：漸化式を解く
- ⑦ 今日のまとめ