

離散数理工学 第3回

数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎)

岡本 吉央

okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021年10月26日

最終更新：2021年10月15日 15:40

今日の目標

- 1 漸化式を解けるようになる
 - ▶ 線形漸化式の解法
 - ▶ 上界の導出法
- 2 数列の母関数が導出できる

目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

例：2 段の格子 — まとめ

$a_n =$ グラフ A_n における完全マッチングの総数 とするとき

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

線形漸化式の解き方 (1)

1 a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

↓

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

これを考えている漸化式の**特性方程式**と呼ぶ

線形漸化式の解き方 (1)

1 a_n を λ^n で置き換えた式を考える

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

↓

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

すなわち,

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

これを考えている漸化式の**特性方程式**と呼ぶ

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

この2つの解を λ_1, λ_2 と書くとする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

線形漸化式の解き方 (1)

2 特性方程式を解く

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \therefore \lambda &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

この2つの解を λ_1, λ_2 と書くとする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(注: $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \lambda_2 = -1$)

線形漸化式の解き方 (1)

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり, $a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ であることを忘れれば,
 $a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である

線形漸化式の解き方 (1)

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり, $a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ であることを忘れれば,
 $a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- ▶ このとき, 線形結合 $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば, } a_n &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-1}) + (c_1 \lambda_1^{n-2} + c_2 \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 (\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2 (\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (1)

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ つまり, $a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ であることを忘れれば,
 $a_n = \lambda_1^n$ と $a_n = \lambda_2^n$ はこの漸化式の解である
- ▶ このとき, 線形結合 $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ もこの漸化式の解である

$$\begin{aligned} \text{なぜならば, } a_n &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \\ a_{n-1} + a_{n-2} &= (c_1 \lambda_1^{n-1} + c_2 \lambda_2^{n-1}) + (c_1 \lambda_1^{n-2} + c_2 \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 (\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2}) + c_2 (\lambda_2^{n-1} + \lambda_2^{n-2}) \\ &= c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \end{aligned}$$

- ▶ $a_1 = 1$ と $a_2 = 2$ を思い出すと, c_1, c_2 が定まる

線形漸化式の解き方 (1)

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

▶ $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ とする

線形漸化式の解き方 (1)

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

- ▶ $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ とする
- ▶ $a_1 = 1, a_2 = 2$ なので,

$$1 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2,$$

$$2 = c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2$$

線形漸化式の解き方 (1)

3 λ_1^n と λ_2^n の線形結合を作る

- ▶ $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ とする
- ▶ $a_1 = 1, a_2 = 2$ なので,

$$1 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2,$$

$$2 = c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2$$

- ▶ c_1, c_2 を変数として, これを解くと

$$c_1 = \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1^2}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2}$$

線形漸化式の解き方 (1)

4 整理する

$$\blacktriangleright c_1 = \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1^2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

$$\blacktriangleright c_2 = \frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$$

線形漸化式の解き方 (1)

4 整理する

$$\blacktriangleright c_1 = \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1^2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$$

$$\blacktriangleright c_2 = \frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$$

したがって, 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$a_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

となる

例：2 段の格子 — まとめ

$a_n =$ グラフ A_n における完全マッチングの総数 とするとき

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

別の方法を用いて、これを解いてみる

線形漸化式の解き方 (2)

1 行列を用いて書き換える

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

↓

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} \quad (n \geq 3 \text{ のとき})$$

線形漸化式の解き方 (2) : 一般論

次のように線形漸化式を書けたとする

$$x_1 = c, \quad x_n = Ax_{n-1} \quad (n \geq 2 \text{ のとき})$$

A は正方行列, x_1, x_2, x_3, \dots と c はベクトル

▶ このとき,

$$x_n = A^{n-1}x_1 = A^{n-1}c$$

▶ したがって, A^{n-1} が計算できればよい

線形漸化式の解き方 (2)

2 行列の累乗を計算する

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とする}$$

- ▶ A の固有値と固有ベクトルを計算する
- ▶ A の特性方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

- ▶ これを解くと, $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- ▶ これが A の固有値で, λ_1, λ_2 と書くことにする

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

線形漸化式の解き方 (2)

λ_1 に対する A の固有ベクトルを $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)v_1 &= 0 \\ \therefore \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

したがって, $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は λ_1 に対する A の固有ベクトル

同様に, $v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は λ_2 に対する A の固有ベクトル

線形漸化式の解き方 (2)

これによって対角化： $U = (v_1 \ v_2)$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$AU = U\Lambda, \quad \text{すなわち,} \quad A = U\Lambda U^{-1}$$

$$\blacktriangleright A^n = (U\Lambda U^{-1})^n = U\Lambda^n U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$\blacktriangleright U = (v_1 \ v_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ なので, } U^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} & -\lambda_2 \lambda_1^{n+1} + \lambda_1 \lambda_2^{n+1} \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_2 \lambda_1^n + \lambda_1 \lambda_2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

3 まとめる

 $n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & -\lambda_2 \lambda_1^{n-1} + \lambda_1 \lambda_2^{n-1} \\ \lambda_1^{n-2} - \lambda_2^{n-2} & -\lambda_2 \lambda_1^{n-2} + \lambda_1 \lambda_2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \frac{2 - \lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1^n + \frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2} \lambda_2^n \\ \frac{2 - \lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1^{n-1} + \frac{\lambda_1 - 2}{\lambda_2} \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \lambda_1^n - \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \lambda_1^{n-1} - \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

線形漸化式の解き方 (2)

したがって, $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \lambda_1^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \lambda_2^n \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

となる ($n = 1, 2$ のときも, この式は正しい)



例：3 段の格子 (第 2 回講義より)

- ▶ $b_n =$ グラフ B_n における完全マッチングの総数
- ▶ $c_n =$ グラフ C_n における完全マッチングの総数 とするとき

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ b_{n-2} + 2c_{n-1} & (n \geq 4, \text{ 偶数のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-2} & (n \geq 3, \text{ 奇数のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例：3 段の格子 — 漸化式の書き換え (1)

- ▶ 自然数 $k \geq 1$ に対して, 次のように記号を定義

$$x_k = b_{2k}, \quad y_k = c_{2k-1}$$

- ▶ ここで, $k \geq 2$ に対して

$$b_{2k} = b_{2k-2} + 2c_{2k-1}$$

$$2c_{2k-1} = 2b_{2k-2} + 2c_{2k-3}$$

$$2c_{2k-3} = 2b_{2k-4} + 2c_{2k-5}$$

$$\vdots$$

$$2c_3 = 2b_2 + 2c_1$$

- ▶ これらの式を足し合わせると, $k \geq 2$ のとき, 次が得られる

$$b_{2k} = b_{2k-2} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} b_{2i} + 2c_1$$

例：3段の格子 — 漸化式の書き換え (2)

- ▶ $\therefore k \geq 2$ のとき,

$$x_k = x_{k-1} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} x_i + 2$$

- ▶ $\therefore k \geq 3$ のとき,

$$x_{k-1} = x_{k-2} + 2 \sum_{i=1}^{k-2} x_i + 2$$

- ▶ 上の式 から 下の式 を引くと, $k \geq 3$ のとき, 次が得られる

$$x_k - x_{k-1} = x_{k-1} - x_{k-2} + 2x_{k-1}$$

$$\therefore x_k = 4x_{k-1} - x_{k-2}$$

例：3 段の格子 — 漸化式の書き換え (3)

$x_2 = b_4 = 11$ なので, x_k に関して次の漸化式が得られる

x_k の満たす漸化式

$$x_k = \begin{cases} 3 & (k = 1 \text{ のとき}) \\ 11 & (k = 2 \text{ のとき}) \\ 4x_{k-1} - x_{k-2} & (k \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

先ほどと同様の方法で解くと, 次が得られる (演習問題)

$$k \geq 1 \text{ のとき, } x_k = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}(2 + \sqrt{3})^k + \frac{3 - \sqrt{3}}{6}(2 - \sqrt{3})^k$$

3段の格子 — まとめ

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ b_{n-2} + 2c_{n-1} & (n \geq 4, \text{ 偶数のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-2} & (n \geq 3, \text{ 奇数のとき}) \end{cases}$$

解くと次が得られる

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \geq 1, \text{ 奇数}) \\ \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^n & (n \geq 2, \text{ 偶数}) \end{cases}$$

c_n については演習問題

目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

出力される a の数に対する漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここでは、簡単な上界を求めてみる

(計算量の解析において、欲しいものは上界 (で十分なこと) が多い)

線形漸化式から上界を導く

1 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1$$



線形漸化式から上界を導く

1 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$



線形漸化式から上界を導く

1 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ▶ ここで, $f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

線形漸化式から上界を導く

1 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ▶ ここで, $f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ 帰結: f_n と f'_n のオーダーは同じ

線形漸化式から上界を導く

1 定数項を取り除く

- ▶ 両辺に 1 を足す

$$f_n + 1 = 1 + f_{n-1} + f_{n-2} + 1 = (f_{n-1} + 1) + (f_{n-2} + 1)$$

- ▶ ここで, $f'_n = f_n + 1$ と置くと

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ 帰結: f_n と f'_n のオーダーは同じ
- ▶ 注意: ここから f'_n を厳密に求めて, f_n を求めてもよいが, ここではそうしない

線形漸化式から上界を導く

2 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

▶ 特性方程式 : $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$

線形漸化式から上界を導く

2 特性方程式を解く

$$f'_n = \begin{cases} 2 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ f'_{n-1} + f'_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶ 特性方程式： $\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$
- ▶ この方程式はただ 1 つ正の解を持ち、それは

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

である

ただ 1 つ正の解を持つことは、
例えば「デカルトの符号規則」から分かる

線形漸化式から上界を導く

3 数学的帰納法で不等式を証明

ここで、次を証明する

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $f'_n \leq 2\lambda^n$ 証明 : $n = 1$ のとき

- ▶ $f'_1 = 2$
- ▶ $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって, $f'_1 < 2\lambda^1$ となる

線形漸化式から上界を導く

3 数学的帰納法で不等式を証明

ここで、次を証明する

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、 $f'_n \leq 2\lambda^n$ 証明 : $n = 1$ のとき

- ▶ $f'_1 = 2$
- ▶ $2\lambda^1 = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_1 < 2\lambda^1$ となる

 $n = 2$ のとき

- ▶ $f'_2 = 2$
- ▶ $2\lambda^2 > 2\lambda = 1 + \sqrt{5}$
- ▶ したがって、 $f'_2 < 2\lambda^2$ となる

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$f'_{k+1} = f'_k + f'_{k-1} \quad (f'_k \text{ の定義})$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \end{aligned}$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \end{aligned}$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\ &= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

線形漸化式から上界を導く

証明の続き : 自然数 $k \geq 2$ が $f'_k \leq 2\lambda^k$ と $f'_{k-1} \leq 2\lambda^{k-1}$ を満たすと仮定

証明すること

$$f'_{k+1} \leq 2\lambda^{k+1}$$

$$\begin{aligned} f'_{k+1} &= f'_k + f'_{k-1} && (f'_k \text{ の定義}) \\ &\leq 2\lambda^k + 2\lambda^{k-1} && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= 2\lambda^{k-1}(\lambda + 1) && (\text{整理}) \\ &= 2\lambda^{k-1}\lambda^2 && (\lambda \text{ が特性方程式の解であるから}) \\ &= 2\lambda^{k+1} && (\text{整理}) \end{aligned}$$

帰結

$$f_n = O\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

オーダー記法：復習

O 記法の定義

非負の値を取る単調非減少数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ と $\{b_n\}_{n \geq 1}$ に対して,

$$a_n = O(b_n)$$

であるとは,
ある自然数 n_0 と正の実数 C が存在して,
任意の自然数 $n \geq n_0$ に対して

$$a_n \leq Cb_n$$

が成り立つこと

$a_n = O(b_n)$ であることの直感的な意味

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の増加率は数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ の増加率以下である

ユークリッドのアルゴリズムの計算量

漸化式

$$g_n \begin{cases} = 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

直感 : まずは g_n がどのように増加するか知る必要があるので、
それを探る

- ▶ 「 \leq 」を「 $=$ 」に置き換える
- ▶ $n = 2^k$ の場合だけを考える ($n = 2^k$ のとき, $\lfloor n/2 \rfloor = 2^{k-1}$)

注 : $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$

ユークリッドのアルゴリズムの計算量：探る

$g'_k = g_{2^k}$ と置き、「 \leq 」を「 $=$ 」に置き換えると、次の漸化式が得られる

$$g'_k = \begin{cases} 3 & k = 0 \text{ のとき} \\ 2 + g'_{k-1} & k \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

- ▶ これは等差数列
- ▶ 任意の自然数 $k \geq 0$ に対して、 $g'_k = 2k + 3$

つまり、 g_n はだいたい $2 \log_2 n$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

帰結

$$g_n = O(\log n)$$

証明 : $n = 1$ のとき

- ▶ 漸化式より, $g_1 \leq 2 + g_{\lfloor 1/2 \rfloor} = 2 + g_0 = 2 + 1 = 3$
- ▶ $3 + 2 \log_2 n = 3 + 2 \log_2 1 = 3 + 0 = 3$
- ▶ したがって, 左辺 \leq 右辺

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き: 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$$

$$g_{k+1} \leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} \quad (g_n \text{ の定義})$$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き: 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
 任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k + 1)$

$$\begin{aligned} g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\ &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \end{aligned}$$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き: 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k+1)$

$$\begin{aligned}
 g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す})
 \end{aligned}$$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き: 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k + 1)$

$$\begin{aligned}
 g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 ((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\
 &= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理})
 \end{aligned}$$

証明すること

今から証明すること

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $g_n \leq 3 + 2 \log_2 n$

証明の続き: 任意の自然数 $k \geq 1$ を考え,
任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して $g_\ell \leq 3 + 2 \log_2 \ell$ が成り立つと仮定

証明すべきこと

$g_{k+1} \leq 3 + 2 \log_2(k + 1)$

$$\begin{aligned}
 g_{k+1} &\leq 2 + g_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor} && (g_n \text{ の定義}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 \lfloor (k+1)/2 \rfloor && (\text{帰納法の仮定}) \\
 &\leq 2 + 3 + 2 \log_2 ((k+1)/2) && (\lfloor \cdot \rfloor \text{ を外す}) \\
 &= 5 + 2(\log_2(k+1) - \log_2 2) && (\text{整理}) \\
 &= 3 + 2 \log_2(k+1) && (\text{整理})
 \end{aligned}$$



目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

デジタル信号処理で「 z 変換」と呼んでいるものと同じ

仮定

この冪級数は収束する

▶ 特に、ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする

▶ つまり、 $|x| < r$ のとき、 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので、『微分積分学』、『解析学』、『複素関数論』の知識が使える

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

例 1

数列 $1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

数列 $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 2^n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

一般に, $a_n = \alpha^n$ で定められる数列の母関数は $\frac{1}{1-\alpha x}$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n =$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n\end{aligned}$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例 2

数列 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = n$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} x^n \\ &= x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1) x^n$$

例 3

数列 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ... の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

例 3

数列 $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ の母関数は？

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して, $a_n = 3n + 1$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (3n + 1)x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1-x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x+1}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ

今日の目標

今日の目標

- 1 漸化式を解けるようになる
 - ▶ 線形漸化式の解法
 - ▶ 上界の導出法
- 2 数列の母関数が導出できる

目次

- ① 線形漸化式の厳密解法
- ② 漸化式より上界を導出する方法
- ③ 母関数
- ④ 今日のまとめ