離散数理工学　第 0 回

ガイダンスと離散数学の復習

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 10 月 5 日

最終更新：2021 年 10 月 5 日　21:07

概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 離散代数
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

概要

主題

次の 3 つを道具として
離散システム／アルゴリズムの設計と解析に関する方法論を学習する

- 数え上げ組合せ論
- 離散代数
- 離散確率論

キャッチフレーズ：「離散数学を使う」

達成目標：以下の 3 項目をすべて達成することを目標とする

1. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論における用語を正しく使うことができる
2. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論における典型的な論法を用いて，証明を行うことができる
3. 数え上げ組合せ論，離散代数，離散確率論を用いて，離散システム／アルゴリズムの設計と解析ができる

典型的な問題 1：誕生日のパラドックス

誕生日問題：設定

このクラスの中に，誕生日が同じ 2 人はいるか？
そのような 2 人がいる確率は？

$\rightsquigarrow$ 実際にやってみる

応用，関連する話題

- 暗号に対する攻撃 (誕生日攻撃)
- 負荷分散

典型的な問題 2：15 パズル

15 パズルとは？

4×4 の盤面に，1 から 15 の書かれた正方形のコマが置かれ，
1 か所の空きを利用してコマを動かし，目的の配置を作成するパズル

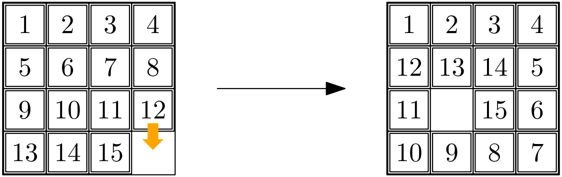
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
12	13	14	5
11		15	6
10	9	8	7

典型的な問題 2：15 パズル

15 パズルとは？

4×4 の盤面に，1 から 15 の書かれた正方形のコマが置かれ，
1 か所の空きを利用してコマを動かし，目的の配置を作成するパズル



典型的な問題 2：15 パズル — サム・ロイドの問題

15 パズルに関するサム・ロイドの問題

次は解けるか？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

- 解けることを証明するためには，手順を示せばよい
- 解けないことを証明するためには，どうすれば？？

スケジュール 前半 (予定)

1. 数え上げの基礎：二項係数と二項定理 (10/12)
2. 数え上げの基礎：漸化式の立て方 (10/19)
3. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (基礎) (10/26)
4. 数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展) (11/2)
5. 離散代数：対称群と置換群 (11/9)
6. 離散代数：有限群 (11/16)

★ 休み (調布祭片付け) (11/23)

7. 離散代数：有限群の応用 (11/30)

★ 休み (国内出張) (12/7)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (基礎) (12/14)
9. 離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展) (12/21)
10. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (基礎) (1/4)
11. 離散確率論：乱択データ構造とアルゴリズム (発展) (1/11)
12. 離散確率論：マルコフ連鎖 (基礎) (1/18)
13. 離散確率論：マルコフ連鎖 (発展) (1/25)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

ティーチング・アシスタント (TA)

- 吉澤 駿暉（よしざわ としあき）
- 居室：西 4 号館 2 階 202 号室 (岡本研究室)

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2021/dme/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2021/dme/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題
- 用語集

授業の受け方

授業時間まで

講義動画 (オンデマンド) を視聴する

- 質問・コメントを Classroom で投稿する (前日の 21:00 まで)
- 授業内演習問題の解答を準備しておく

授業時間中

リアルタイム授業を受講する

- 授業内容について質問・討論を行う (←復習動画として公開される)
- グループワークで授業内演習問題に取り組む

授業時間の後

演習問題に取り組む

- 取り組み方については後述

いずれにおいても，出席は取らない (評価の対象とならない)

演習問題

演習問題の種類

- 授業内問題：リアルタイム授業で扱う

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加

- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

演習問題の進め方

- 授業内問題は，リアルタイム授業で扱う
- それ以外の問題は，自習用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題 (続)

答案の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出 **してもよい**
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
  - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)

成績評価

評価方法 : 2 回のレポート提出 ***のみ*** による

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 5 題出題する
  - その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし，「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点 : 1 題 10 点満点

評価基準 : レポート 1 の素点 + レポート 2 の素点

- これ以外の要素は成績評価に考慮されない

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- J. マトウシェク，J. ネシェトリル (著)，根上生也，中本敦浩 (訳)，「離散数学への招待 (上・下)」，丸善出版，2002.
- 浅野孝夫，「情報数学」，コロナ社，2009.
- 小島定吉，「離散構造」，朝倉書店，2013.
- 玉木久夫，「情報科学のための確率入門」，サイエンス社，2002.
- 伏見正則，「確率と確率過程」，朝倉書店，2004.
- など

格言

格言 (三省堂 大辞林)

短い言葉で、人生の真理や処世術などを述べ、教えや戒めとした言葉。「石の上にも三年」「沈黙は金」など。金言。

格言 (この講義における)

講義内容とは直接関係ないかもしれないが,
私 (岡本) が重要だと思うこと

格言 (の例)

単位取得への最短の道のりは，授業に出て，演習問題を解くこと

目次

階乗

定義：階乗とは？（直感的定義）

自然数 $n \geq 0$ の **階乗** とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $\ldots$

階乗：再帰的定義

定義：階乗とは？（再帰的定義）

自然数 $n \geq 0$ の **階乗** とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n-1)! & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$
- $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- $\ldots$

組合せ的解釈

階乗の組合せ的解釈

$n!$ = 区別できる n 個のものを 1 列に並べる方法の総数 (順列)

$n = 4$ のとき，$n! = 24$

▶ 1 2 3 4	▶ 2 1 3 4	▶ 3 1 2 4	▶ 4 1 2 3
▶ 1 2 4 3	▶ 2 1 4 3	▶ 3 1 4 2	▶ 4 1 3 2
▶ 1 3 2 4	▶ 2 3 1 4	▶ 3 2 1 4	▶ 4 2 1 3
▶ 1 3 4 2	▶ 2 3 4 1	▶ 3 2 4 1	▶ 4 2 3 1
▶ 1 4 2 3	▶ 2 4 1 3	▶ 3 4 1 2	▶ 4 3 1 2
▶ 1 4 3 2	▶ 2 4 3 1	▶ 3 4 2 1	▶ 4 3 2 1

格言

組合せの等式は，組合せ的解釈で直感的に理解

二項係数

定義：二項係数とは？

自然数 a, b で $a \geq b$ を満たすものに対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- $\binom{a}{b}$ は「a choose b」と読む (のが普通)
- 「${}_a\mathrm{C}_b$」という記号を高校では (なぜか) 使うが，国際的にはあまり用いられない (通じないか，通じにくい)

組合せ的解釈 (1)：部分集合

二項係数の組合せ的解釈 (1)

$\binom{a}{b}$ = 要素数 a の集合における，要素数 b の部分集合の総数

$a = 5$, $b = 2$ のとき：$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の部分集合で要素数 2 のもの

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,3\},$$
$$\{2,4\},\ \{2,5\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}$$

$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (2)：着色

二項係数の組合せ的解釈 (2)

$\binom{a}{b}$ = 区別できる a 個のものの中から b 個に色を塗る方法の総数

$a = 5,\ b = 2$ のとき

●●●●●→■■●●●　●●●●●→■●■●●

●●●●●→■●●■●　●●●●●→■●●●■

●●●●●→●■■●●　●●●●●→●■●■●

●●●●●→●■●●■　●●●●●→●●■■●

●●●●●→●●■●■　●●●●●→●●●■■

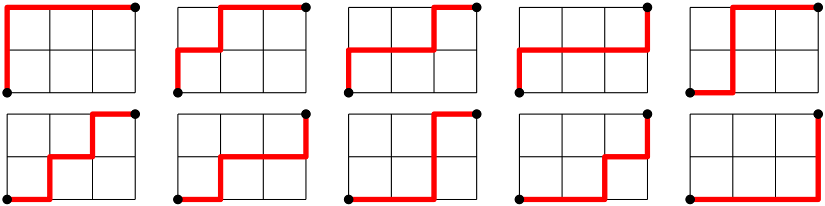
$$\binom{5}{2} = 10$$

組合せ的解釈 (3)：格子道

二項係数の組合せ的解釈 (3)

$\binom{a}{b}$ = $(0,0)$ から $(a-b,b)$ に至る (単調な) 格子道の総数

$a=5$, $b=2$ のとき：$(0,0)$ から $(3,2)$ に至る格子道



$$\binom{5}{2}=10$$

二項係数に関する恒等式

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

性質：パスカルの規則

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a-1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

パスカルの三角形

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

パスカルの三角形

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}
$$

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

パスカルの三角形

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \boxed{\binom{4}{1}} \quad \boxed{\binom{4}{2}} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \boxed{\binom{5}{2}} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}
\end{array}$$

性質：パスカルの規則

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：着色

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- 左辺 $=$ a 個のものの中から色を塗る b 個を選ぶ
- 右辺 $=$ a 個のものの中から色を塗らない $a-b$ 個を選ぶ

$a = 5$, $b = 2$ のとき

●●●●●→■■●●●	●●●●●→■●■●●
●●●●●→■●●■●	●●●●●→■●●●■
●●●●●→●■■●●	●●●●●→●■●■●
●●●●●→●■●●■	●●●●●→●●■■●
●●●●●→●●■●■	●●●●●→●●●■■

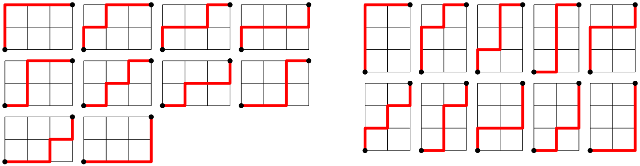
二項係数に関する恒等式：対称性 — 組合せ的解釈：格子道

性質：二項係数の対称性

任意の自然数 $a \geq b \geq 0$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

- 左辺 $=$ $(0,0)$ から $(a-b,b)$ へ至る格子道の総数
- 右辺 $=$ $(0,0)$ から $(b,a-b)$ へ至る格子道の総数



直線 $y=x$ に関してこの 2 つは対称なので，等式が成り立つ

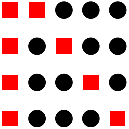
二項係数に関する恒等式：パスカルの規則 — 組合せ的解釈：着色

性質：パスカルの規則

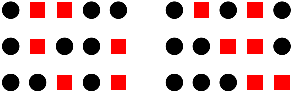
任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，$a - 1 \geq b$ ならば，

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

- 最初のものを塗る場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b-1}$ 通り
- 最初のものを塗らない場合だけ見ると，$\binom{a-1}{b}$ 通り



$$\binom{4}{1} = 4$$



$$\binom{4}{2} = 6$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b} b = a \binom{a-1}{b-1}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b}\binom{b}{1} = \binom{a}{1}\binom{a-1}{b-1}$$

二項係数に関する恒等式：吸収恒等式 — 組合せ的解釈：着色

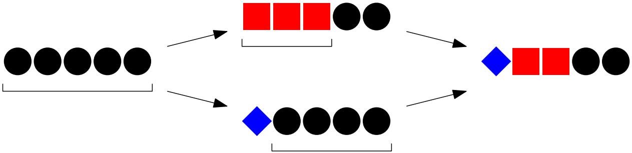
性質：吸収恒等式

任意の自然数 $a \geq b \geq 1$ に対して，

$$\binom{a}{b}\binom{b}{1} = \binom{a}{1}\binom{a-1}{b-1}$$

a 個のものの中から $b-1$ 個に赤を塗り，1 個に青を塗る

- 左辺 $=$ a 個のものの中から b 個に赤を塗り，
  その b 個の中から 1 個に青を塗る
- 右辺 $=$ a 個のものの中から 1 個に青を塗り，
  残り $a-1$ 個の中から $b-1$ 個に赤を塗る



次回の予告

今日の内容

離散数学の復習

- 階乗
- 二項係数

$\rightsquigarrow$ 組合せ的解釈

格言

組合せの等式は，組合せ的解釈で直感的に理解

次回の予告

二項係数について さらに詳しく

- 二項係数：上界と下界
- 二項定理
- カタラン数