

# 離散数理工学 第 13 回

離散確率論：マルコフ連鎖 (発展)

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 1 月 25 日

最終更新：2022 年 1 月 17 日 19:11

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (13)

2022 年 1 月 25 日

1 / 36

## マルコフ連鎖：例

次の状況を考える

- ▶ ある街の天気は「晴れ (F)」, 「曇り (C)」, 「雨 (R)」のいずれか
- ▶ 天気は毎日, 確率的に変わる
  - ▶ 晴れの日の翌日の天気が晴れである確率 =  $1/2$
  - ▶ 晴れの日の翌日の天気が曇りである確率 =  $1/3$
  - ▶ 晴れの日の翌日の天気が雨である確率 =  $1/6$
  - ▶ 曇りの日の翌日の天気が晴れである確率 =  $1/3$
  - ▶ 曇りの日の翌日の天気が曇りである確率 =  $1/3$
  - ▶ 曇りの日の翌日の天気が雨である確率 =  $1/3$
  - ▶ 雨の日の翌日の天気が晴れである確率 =  $1/4$
  - ▶ 雨の日の翌日の天気が曇りである確率 =  $1/2$
  - ▶ 雨の日の翌日の天気が雨である確率 =  $1/4$

## ポイント

次の日の天気 (に関する確率) は, 前の日の天気だけから決まる

岡本 吉央 (電通大)

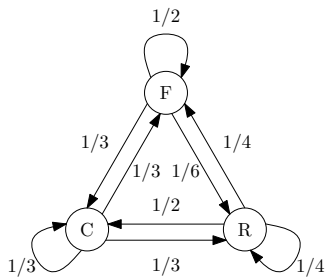
離散数理工学 (13)

2022 年 1 月 25 日

3 / 36

## マルコフ連鎖：例 — 状態遷移図

見にくいので, 状態遷移図で表現する



「始点」から「終点」へ推移する

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (13)

2022 年 1 月 25 日

5 / 36

## ギャンブラーの破産

### ギャンブラーの破産：設定

#### 設定

- ▶ 1 人のギャンブラー, 所持金  $n$  万円
- ▶ 賭けを行うごとに,
  - ▶  $1/2$  の確率で, 所持金が 1 万円増加
  - ▶  $1/2$  の確率で, 所持金が 1 万円減少
- ▶ 所持金が  $3n$  万円か 0 万円になったら, 終了

#### 問題

- 1 最終的に, 0 万円になって終了する確率は? (破産確率)
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は?

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (13)

2022 年 1 月 25 日

7 / 36

## 今日の目標

### 今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- ▶ 「ギャンブラーの破産」において, 破産確率を計算できる
- ▶ 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において, 到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は「齊次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (13)

2022 年 1 月 25 日

2 / 36

## マルコフ連鎖：例 — 推移行列

見にくいので, 行列で表現する

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} F & C & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} F \\ C \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

「行」から「列」へ推移する

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (13)

2022 年 1 月 25 日

4 / 36

## ギャンブラーの破産

### 目次

- 1 ギャンブラーの破産
- 2 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- 3 今日のまとめ

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (13)

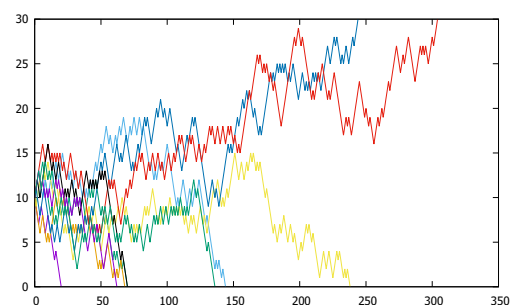
2022 年 1 月 25 日

6 / 36

## ギャンブラーの破産

### ギャンブラーの破産：とりあえず, シミュレーション

$n = 10$  の場合



10 回の試行中, 破産は 8 回

岡本 吉央 (電通大)

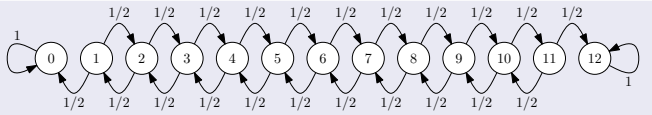
離散数理工学 (13)

2022 年 1 月 25 日

8 / 36

- ▶ 状態空間は  $\{0, 1, \dots, n, \dots, 3n\}$
- ▶  $X_t = t$  回目の賭けをした後の所持金 (単位：万円) (確率変数)

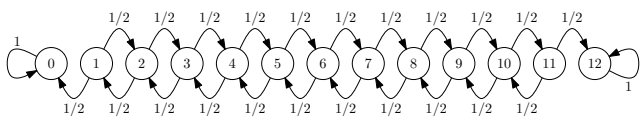
状態遷移図：  $n = 4$  のとき



最終的に0万円になって終了する確率：漸化式

$p_k =$  所持金が  $k$  万円であるとき、0万円 で終了する確率

$$p_k = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k)$$



- ▶ このとき、次の漸化式が得られる

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

最終的に0万円になって終了する確率：漸化式を解く (1)

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \quad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}), \\ p_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

- ▶ つまり、  $1 \leq k \leq 3n-1$  のとき

$$p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$$

- ▶  $q_k = p_{k+1} - p_k$  と置くと

$$\begin{aligned} q_0 &= p_1 - p_0 = p_1 - 1, \\ q_k &= q_{k-1} \quad (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

- ▶ つまり、  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \dots = q_{3n-1}$  なので、...

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式 (1)

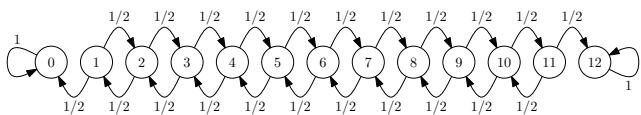
興味の対象

$$T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n] \text{ (確率変数の期待値)}$$

- ▶ 次の期待値を考える

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

- ▶ このとき、  $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$  が成り立つ



- ▶ また、直感的には、  $1 \leq k \leq 3n-1$  のとき、次が成り立つ？

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2}T_{n,k-1} + \frac{1}{2}T_{n,k+1}$$

問題

- 1 最終的に、0万円になって終了する確率は？
- 2 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は？

興味の対象

- 1  $p_n = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = n)$  (確率)
- 2  $T_n = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = n]$  (確率変数の期待値)

最終的に0万円になって終了する確率：漸化式 (詳細)

$1 \leq k \leq 3n-1$  のとき、

$$\begin{aligned} p_k &= \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k) \\ &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k) \\ &= \sum_{h=0}^{3n} \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = h) \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\ &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k-1) \Pr(X_1 = k-1 \mid X_0 = k) + \\ &\quad \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_0 = k, X_1 = k+1) \Pr(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) \\ &= \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_1 = k-1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists t \geq 1: X_t = 0 \mid X_1 = k+1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k-1) \cdot \frac{1}{2} + \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k+1) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \end{aligned}$$

最終的に0万円になって終了する確率：漸化式を解く (2)

- ▶ つまり、  $p_1 - 1 = q_0 = q_1 = \dots = q_{3n-1}$  なので

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + (p_1 - p_0) = 1 + q_0, \\ p_2 &= p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) = 1 + q_0 + q_1 = 1 + 2q_0, \\ &\vdots \\ p_k &= p_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (p_{i+1} - p_i) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} q_i = 1 + kq_0, \\ &\vdots \\ 0 &= p_{3n} = 1 + 3nq_0 \end{aligned}$$

- ▶ したがって、  $q_0 = -\frac{1}{3n}$
- ▶ したがって、  $p_k = 1 - \frac{k}{3n}$ 、特に、  $p_n = 1 - \frac{n}{3n} = \frac{2}{3}$

終了するまでに賭けを行う回数 (期待値)：漸化式 (2)

$$\begin{aligned} T_{n,k} &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k] \\ &= \sum_{h=0}^{3n} E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = h] \Pr(X_1 = h \mid X_0 = k) \\ &= E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k+1] \Pr(X_1 = k+1 \mid X_0 = k) + \\ &\quad E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k, X_1 = k-1] \Pr(X_1 = k-1 \mid X_0 = k) \\ &= (1 + T_{n,k+1}) \cdot \frac{1}{2} + (1 + T_{n,k-1}) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}T_{n,k+1} + \frac{1}{2}T_{n,k-1} \end{aligned}$$

演習問題

任意の自然数値確率変数  $X, Y$  と事象  $A$  に対して、  $\Pr(A) \neq 0$  のとき

$$E[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} E[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

解くべき漸化式

$$T_{n,k} = \begin{cases} 0 & (k \in \{0, 3n\} \text{ のとき}) \\ 1 + \frac{1}{2}T_{n,k+1} + \frac{1}{2}T_{n,k-1} & (1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

最終的に知りたいのは,  $T_{n,n}$

▶  $1 \leq k \leq 3n-1$  のとき,

$$T_{n,k+1} - T_{n,k} = T_{n,k} - T_{n,k-1} - 2$$

▶  $U_k = T_{n,k+1} - T_{n,k}$  と置くと,

$$1 \leq k \leq 3n-1 \text{ のとき, } U_k = U_{k-1} - 2$$

$$T_{n,k} = kU_0 - k(k-1) \quad (k \in \{1, 2, \dots, 3n\}),$$

$$0 = T_{n,3n} = 3nU_0 - 3n(3n-1)$$

▶ したがって,  $U_0 = 3n-1$

▶ したがって,  $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$  のとき,

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

▶  $T_{n,0} = 0$  なので,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 3n\}$  のとき,

$$T_{n,k} = k(3n-1) - k(k-1) = k(3n-k)$$

つまり,  $T_n = T_{n,n} = n(3n-n) = 2n^2$

目次

① ギャンブラーの破産

② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク

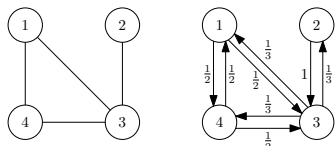
③ 今日のまとめ

有限無向グラフ  $G = (V, E)$

到達時刻 とは?

$G$  上の単純ランダムウォークにおいて, 頂点  $u \in V$  から頂点  $v \in V$  への **到達時刻** とは,

$$\tau_{u,v} = \min\{t \geq 0 \mid X_t = v, X_0 = u\}$$



- ▶ この期待値を到達時刻と呼ぶこともある
- ▶ 「 $t \geq 0$ 」ではなく「 $t \geq 1$ 」とする場合もある

$$\begin{aligned} T_{n,1} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) = U_0, \\ T_{n,2} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) \\ &= U_0 + U_1 = U_0 + U_0 - 2 = 2U_0 - 2, \\ T_{n,3} &= T_{n,0} + (T_{n,1} - T_{n,0}) + (T_{n,2} - T_{n,1}) + (T_{n,3} - T_{n,2}) \\ &= U_0 + U_1 + U_2 = U_0 + U_0 - 2 + U_0 - 4 = 3U_0 - 6, \\ &\vdots \\ T_{n,k} &= T_{n,0} + \sum_{i=0}^{k-1} (T_{n,i+1} - T_{n,i}) = kU_0 - k(k-1), \\ &\vdots \\ 0 = T_{n,3n} &= 3nU_0 - 3n(3n-1) \end{aligned}$$

設定

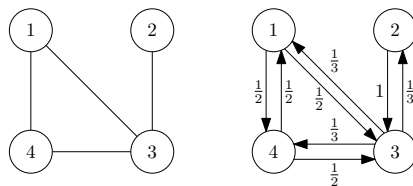
- ▶ 1 人のギャンブラー, 所持金  $n$  万円
- ▶ 賭けを行うごとに,
  - ▶  $1/2$  の確率で, 所持金が 1 万円増加
  - ▶  $1/2$  の確率で, 所持金が 1 万円減少
- ▶ 所持金が  $3n$  万円か  $0$  万円になったら, 終了

問題と解答

- 最終的に,  $0$  万円になって終了する確率は? (破産確率)  
 $\rightsquigarrow \frac{2}{3}$
- 終了するまでに賭けを行う回数 (の期待値) は?  
 $\rightsquigarrow 2n^2$

有限無向グラフ  $G = (V, E) : V$  は  $G$  の頂点集合,  $E$  は  $G$  の辺集合

- ▶ 時刻  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  に対して, 次のように駒を動かす
  - ▶  $t = 0$  のとき, 駒はある決められた頂点  $u \in V$  に置かれている
  - ▶  $t = k$  のとき, 駒が頂点  $v \in V$  に置かれているとすると,  $t = k+1$  のとき, 駒は  $v$  の隣接頂点へ等確率で動かされる
- ▶ 時刻  $t$  において駒の置かれる頂点を  $X_t$  とすると,  $\langle X_t \mid t \in \mathbb{N} \rangle$  は確率過程



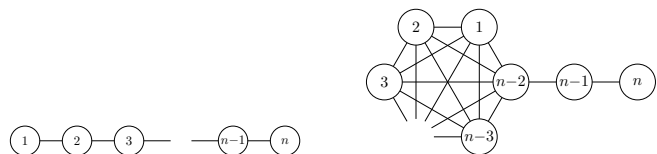
- ▶ この確率過程を  $G$  上の **単純ランダムウォーク** と呼ぶ

問題

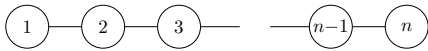
次の 2 つのグラフを考えると, 頂点 1 から頂点  $n$  への到達時刻の期待値が大きいのはどちらか?

頂点数  $n$  の道

頂点数  $n-2$  の完全グラフ + 長さ 2 の道



次のグラフを考える (頂点数  $n$  の道)



左端の頂点を 1, 右端の頂点を  $n$  として,  $E[\tau_{1,n}]$  を計算する

▶ グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n} = \tau_{1,2} + \tau_{2,3} + \dots + \tau_{n-1,n}$$

▶ したがって, 期待値の線形性より

$$E[\tau_{1,n}] = E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \dots + E[\tau_{n-1,n}]$$

▶ つまり, 任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対する  $E[\tau_{i,i+1}]$  が分かればよい

▶ したがって,  $a_i = E[\tau_{i,i+1}]$  と置くと

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i = 1 \text{ のとき}), \\ 2 + a_{i-1} & (i \in \{2, \dots, n-1\} \text{ のとき}) \end{cases}$$

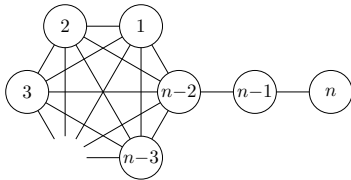
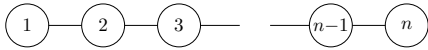
▶ これを解くと, 任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対して,  $a_i = 2i - 1$

**証明したこと**

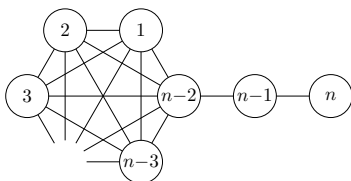
任意の  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  に対して,  $E[\tau_{i,i+1}] = 2i - 1$

以上の考察をまとめると,

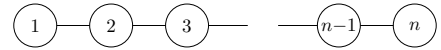
$$\begin{aligned} E[\tau_{1,n}] &= E[\tau_{1,2}] + E[\tau_{2,3}] + \dots + E[\tau_{n-1,n}] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) = (n-1)^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E[\tau_{1,n-2}] &= \frac{1}{n-3} \cdot 1 + \frac{n-4}{n-3} \cdot (1 + E[\tau_{1,n-2}]) \\ (n-3)E[\tau_{1,n-2}] &= n-3 + (n-4)E[\tau_{1,n-2}] \\ \therefore E[\tau_{1,n-2}] &= n-3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E[\tau_{n-1,n}] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} (1 + E[\tau_{n-2,n-1}] + E[\tau_{n-1,n}]) \\ 2E[\tau_{n-1,n}] &= 2 + E[\tau_{n-2,n-1}] + E[\tau_{n-1,n}] \\ &= 2 + (n-2)(n-3) + 1 + E[\tau_{n-1,n}] \\ \therefore E[\tau_{n-1,n}] &= (n-2)(n-3) + 3 \end{aligned}$$

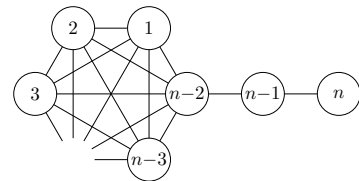


▶ まず,  $E[\tau_{1,2}] = 1$

▶ 次に,  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  のとき,

$$\begin{aligned} E[\tau_{i,i+1}] &= 1 \cdot \frac{1}{2} + (1 + E[\tau_{i-1,i+1}]) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} (E[\tau_{i-1,i}] + E[\tau_{i,i+1}]) \\ \therefore E[\tau_{i,i+1}] &= 2 + E[\tau_{i-1,i}] \end{aligned}$$

次のグラフを考える (頂点数  $n-2$  の完全グラフに長さ 2 の道を追加,  $n \geq 3$ )



$E[\tau_{1,n}]$  を計算する

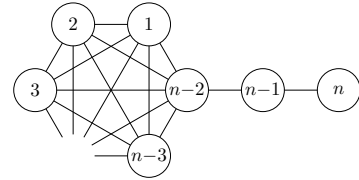
▶ グラフの形状から次が分かる

$$\tau_{1,n} = \tau_{1,n-2} + \tau_{n-2,n-1} + \tau_{n-1,n}$$

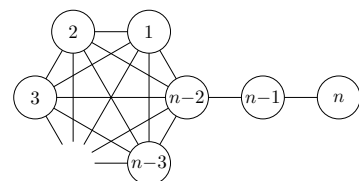
▶ したがって, 期待値の線形性から

$$E[\tau_{1,n}] = E[\tau_{1,n-2}] + E[\tau_{n-2,n-1}] + E[\tau_{n-1,n}]$$

▶ つまり,  $E[\tau_{1,n-2}], E[\tau_{n-2,n-1}], E[\tau_{n-1,n}]$  が分かればよい



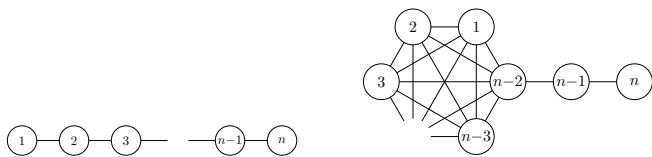
$$\begin{aligned} E[\tau_{n-2,n-1}] &= \frac{1}{n-2} \cdot 1 + \frac{n-3}{n-2} (1 + E[\tau_{1,n-2}] + E[\tau_{n-2,n-1}]) \\ (n-2)E[\tau_{n-2,n-1}] &= n-2 + (n-3)E[\tau_{1,n-2}] + (n-3)E[\tau_{n-2,n-1}] \\ &= n-2 + (n-3)^2 + (n-3)E[\tau_{n-2,n-1}] \\ \therefore E[\tau_{n-2,n-1}] &= n-2 + (n-3)^2 = (n-2)(n-3) + 1 \end{aligned}$$



したがって,

$$\begin{aligned} E[\tau_{1,n}] &= E[\tau_{1,n-2}] + E[\tau_{n-2,n-1}] + E[\tau_{n-1,n}] \\ &= (n-3) + ((n-2)(n-3) + 1) + ((n-2)(n-3) + 3) \\ &= 2n^2 - 9n + 13 \end{aligned}$$

- ▶ 頂点数  $n$  の道：  
到達時刻の期待値  $= (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$
- ▶ 頂点数  $n-2$  の完全グラフ + 長さ 2 の道：  
到達時刻の期待値  $= 2n^2 - 9n + 13$



教訓：辺を多くすると、到達時刻の期待値が増えることがある

- ① ギャンブラーの破産
- ② 有限グラフ上の単純ランダムウォーク
- ③ 今日のまとめ

## 今日の目標

マルコフ連鎖について以下ができるようになる

- ▶ 「ギャンブラーの破産」において、破産確率を計算できる
- ▶ 「有限グラフ上の単純ランダムウォーク」において、到達時刻 (の期待値) を計算できる

この講義で扱うマルコフ連鎖は

「斉次 離散時間 有限状態 マルコフ連鎖」と呼ばれるもの