離散数理工学　第 9 回

離散確率論：確率的離散システムの解析 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 12 月 21 日

最終更新：2021 年 12 月 12 日　17:46

今日の目標

今日の目標

確率的に定義されるグラフの性質を調べられるようになる

- ランダム・グラフの定義と性質
- ランダム・グラフの閾値現象 (相転移)

目次

ランダム・グラフ

ランダム・グラフとは？

「確率的に生成されるグラフ」で，次のいずれかを指す

- 確率的に生成された 1 つのグラフ
- グラフの集合上の確率分布

この講義では，「グラフの集合上の確率分布」を考える

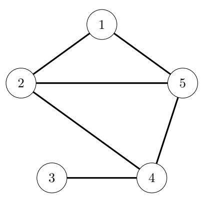
エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：例

グラフの集合上の確率分布として，
エルデシュとレニィのランダム・グラフ が 最も古典的で有名

基本的な考え方：次の 2 つを予め決めておく

- n：頂点数
- p：辺確率

$n=5$，$p=1/2$ のときの例：このグラフが得られる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$



エルデシュ・レニィのランダム・グラフ

グラフの集合上の確率分布として，
エルデシュとレニィのランダム・グラフ が 最も古典的で有名

定義：エルデシュとレニィのランダム・グラフ $\mathbb{G}(n,p)$

- 実数 $p \in (0,1)$ と正整数 n を考える
- $\mathbb{G}(n,p)$ は，頂点数 n の無向グラフ全体上の確率分布で，次を満たす
  - 各 2 頂点組 $\{u,v\}$ に対して，
    $$\Pr(\{u,v\} \text{ が辺である}) = p \quad (\text{辺確率})$$
  - 複数の異なる 2 頂点組 $\{u_1,v_1\},\dots,\{u_k,v_k\}$ (任意) に対して，辺確率は互いに独立

以後，$\mathbb{G}(n,p)$ のグラフの頂点集合を $V=\{1,2,\dots,n\}$ で表す

エルデシュ・レニィのランダム・グラフ：辺確率の独立性

復習：互いに独立であること

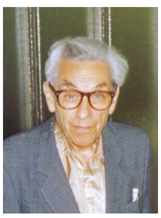
「複数の異なる 2 頂点組 $\{u_1,v_1\},\dots,\{u_k,v_k\}$ (任意) に対して，
辺確率は互いに独立」 とは？

任意の $k \in \mathbb{N}$ と，
複数の異なる任意の 2 頂点組 $\{u_1,v_1\},\dots,\{u_k,v_k\}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\Pr(\{u_1,v_1\} \text{ が辺である，かつ，}\dots\text{，かつ，} \{u_k,v_k\} \text{ が辺である})\\
&= \Pr(\{u_1,v_1\} \text{ が辺である}) \cdots\cdots \Pr(\{u_k,v_k\} \text{ が辺である})\\
&= p^k
\end{aligned}$$

エルデシュ，レニィ，ギルバート

エルデシュとレニィのランダム・グラフは
エルデシュとレニィの論文 (1959) に登場するが
それと同時期に，ギルバートの論文 (1959) でも登場している


Paul Erdős
(1913–1996)


Alfréd Rényi
(1921–1970)


Edgar Gilbert
(1923–2013)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Erdos_budapest_fall_1992_(cropped).jpg
http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Renyi.html
https://www.legacy.com/obituaries/dailyrecord/obituary.aspx?n=edgar-nelson-gilbert&pid=165433665&fhid=14801

$\mathbb{G}(n,p)$ の基本的性質：グラフの生成確率

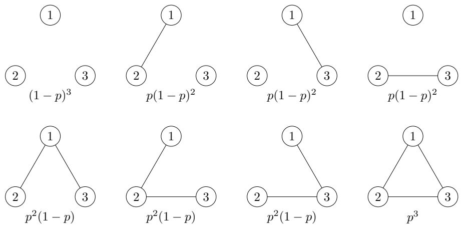
辺確率の独立性から，次がただちに分かる

性質：グラフの生成確率

グラフ G の頂点数が n，辺数が m のとき，$\mathbb{G}(n,p)$ において

$$\Pr(G \text{ が生成される}) = p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$$

例：$n=3$ のとき



$\mathbb{G}(n,p)$ における次数の期待値

頂点 v の **次数** とは，v に隣接する頂点の数のこと ($\deg(v)$ で表す)

性質：$\mathbb{G}(n,p)$ の次数の期待値

$\mathbb{G}(n,p)$ では，任意の頂点 v に対して，次が成り立つ

$$\mathsf{E}[\deg(v)] = (n-1)p$$

例：$n=3$ のとき

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\deg(\text{頂点 }1)] &= 0\cdot(1-p)^3 + 1\cdot p(1-p)^2 + 1\cdot p(1-p)^2 + 0\cdot p(1-p)^2 \\ &\quad + 2\cdot p^2(1-p) + 1\cdot p^2(1-p) + 1\cdot p^2(1-p) + 2\cdot p^3 \\ &= 2p(1-p)^2 + 4p^2(1-p) + 2p^3 \\ &= 2p\end{aligned}$$

$\mathbb{G}(n,p)$ における次数の期待値：証明

$G=(V,E)$ を $\mathbb{G}(n,p)$ に従って得られる無向グラフとする

- v 以外の任意の頂点 $u \in V-\{v\}$ に対して，
$$\Pr(\{u,v\}\in E) = p$$
- 任意の頂点 $u \in V-\{v\}$ に対して，次の標示確率変数 X_u を考える
$$X_u = \begin{cases}1 & (\{u,v\}\in E),\\ 0 & (\{u,v\}\notin E)\end{cases}$$
- このとき，$\deg(v) = \sum_{u\in V-\{v\}} X_u$
- さらに，任意の頂点 $u \in V-\{v\}$ に対して，
$$\mathsf{E}[X_u] = 1\cdot\Pr(\{u,v\}\in E) + 0\cdot\Pr(\{u,v\}\notin E) = \Pr(\{u,v\}\in E) = p$$

$\mathbb{G}(n,p)$ における次数の期待値：証明 (続き)

したがって，

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\deg(v)] &= \mathsf{E}\left[\sum_{u\in V-\{v\}} X_u\right] \\ &= \sum_{u\in V-\{v\}} \mathsf{E}[X_u] \\ &= \sum_{u\in V-\{v\}} p \\ &= (n-1)p\end{aligned}$$

□

$\mathbb{G}(n,p)$ における次数 — 期待値周辺への集中

疑問

$\deg(v)$ は $(n-1)p$ の周辺に集中するのか？

チェルノフ上界の技法を用いる

$$\Pr(\deg(v)\ge 2(n-1)p) = \Pr\left(2^{\deg(v)} \ge 2^{2(n-1)p}\right) \le \frac{\mathsf{E}\left[2^{\deg(v)}\right]}{2^{2(n-1)p}}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[2^{\deg(v)}\right] &= \mathsf{E}\left[2^{\sum_{u\in V-\{v\}} X_u}\right] = \mathsf{E}\left[\prod_{u\in V-\{v\}} 2^{X_u}\right] \\ &= \prod_{u\in V-\{v\}} \mathsf{E}\left[2^{X_u}\right] = (2^1\cdot p + 2^0\cdot(1-p))^{n-1} = (1+p)^{n-1}\end{aligned}$$

したがって，$\Pr(\deg(v)\ge 2(n-1)p) \le \dfrac{(1+p)^{n-1}}{2^{2(n-1)p}} = \left(\dfrac{1+p}{4^p}\right)^{n-1}$

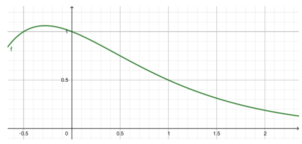
$\mathbb{G}(n,p)$ における次数 — 期待値周辺への集中 (続き)

疑問

$\deg(v)$ は $(n-1)p$ の周辺に集中するのか？

$$\Pr(\deg(v)\ge 2(n-1)p) \le \left(\frac{1+p}{4^p}\right)^{n-1}$$

- $p\in(0,1)$ なので，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{1+p}{4^p} < 1$



- $\therefore 0 < \left(\dfrac{1+p}{4^p}\right)^{n-1} \to 0 \ (n\to\infty)$

目次

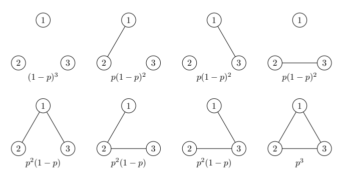
ランダム・グラフが孤立点を含む確率

無向グラフの **孤立点**：次数が 0 の頂点 のこと

例題

エルデシュとレニィのランダム・グラフ $\mathbb{G}(n,p)$ において，
孤立点が存在する確率を計算せよ

$n=3$ のとき，
孤立点が存在する確率
$=(1-p)^3 + 3p(1-p)^2$
$=(1-p)^2(1+2p)$

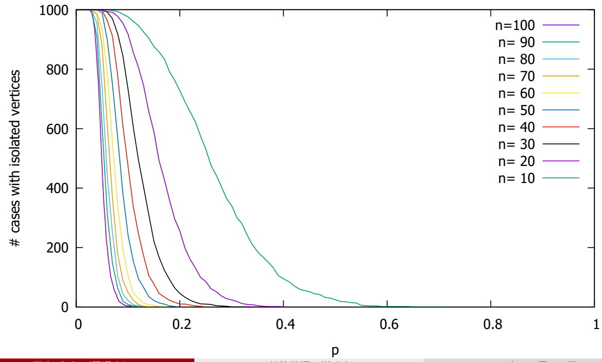


- これを正確に計算するのは 難しい
- $\therefore n\to\infty$ のときの漸近的な振る舞いを考察する

注：漸近的な振る舞いの方が (粗い情報なので) 考察しやすい

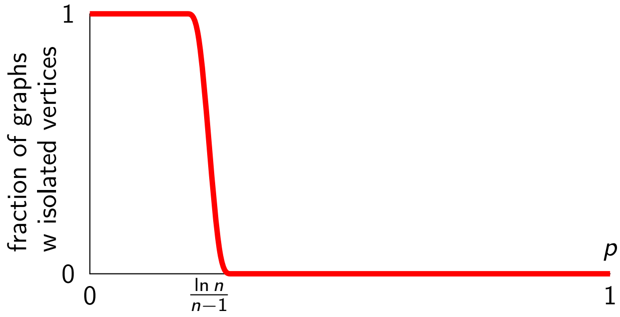
シミュレーション

横軸：$p \in [0.0, 1.0]$
縦軸：1000 回の試行中，孤立点を持つグラフが得られた総数



理論：今から証明すること

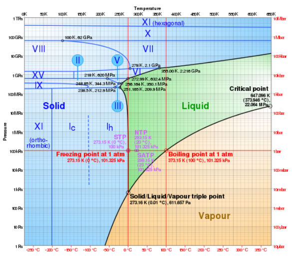
$n \to \infty$ のとき



「孤立点を持つ」という性質は **閾値現象** を持つ (**相転移** を起こす)

相転移

相転移 (閾値現象) は 物理学や化学等でも重要な概念



⇝ ランダム・グラフは物理学者の興味の対象でもある

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Phase_diagram_of_water.svg

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：先に結論

G は $\mathbb{G}(n,p)$ に従って得られるグラフとする

性質：ランダム・グラフが孤立点を含む確率

$\varepsilon \in (0,1)$ は任意の正実数

- $p \leq (1-\varepsilon)\dfrac{\ln n}{n-1}$ のとき
$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \to 1 \quad (n \to \infty)$$
- $p \geq (1+\varepsilon)\dfrac{\ln n}{n-1}$ のとき
$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

感覚をつかむため，まず $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ のときに証明する

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が大きい場合 (1)

- 頂点 $v \in V$ に着目
- G において v が孤立点である確率を計算すると
$$\Pr(v \text{ が孤立点}) = (1-p)^{n-1}$$
- 次の確率変数 X_v を考える
$$X_v = \begin{cases} 1 & (v \text{ が孤立点である}), \\ 0 & (v \text{ が孤立点ではない}) \end{cases}$$
- このとき，G における孤立点の総数 (確率変数) を X とすると
$$X = \sum_{v \in V} X_v, \quad \Pr(G \text{ が孤立点を含む}) = \Pr(X \geq 1)$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が大きい場合 (2)

$p \geq \dfrac{3}{2}\dfrac{\ln n}{n-1}$ とする

- このとき，マルコフの不等式より
$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathsf{E}[X]}{1} = \mathsf{E}[X] = \mathsf{E}\left[\sum_{v \in V} X_v\right] = \sum_{v \in V} \mathsf{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\ &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \leq n\,\mathrm{e}^{-p(n-1)} \\ &\leq n\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\frac{\ln n}{n-1}(n-1)} = n\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\ln n} = n \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \\ &= \frac{1}{n^{1/2}} \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$
- つまり，$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \to 0 \ (n \to \infty)$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が大きい場合 (3)

より一般に，$p \geq (1+\varepsilon)\dfrac{\ln n}{n-1}$ とする (ただし，$\varepsilon > 0$)

- このとき，マルコフの不等式より
$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 1) &\leq \frac{\mathsf{E}[X]}{1} = \mathsf{E}[X] = \mathsf{E}\left[\sum_{v \in V} X_v\right] = \sum_{v \in V} \mathsf{E}[X_v] \\ &= \sum_{v \in V} \Pr(v \text{ は孤立点}) \\ &= \sum_{v \in V} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1} \leq n\,\mathrm{e}^{-p(n-1)} \\ &\leq n\,\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)\frac{\ln n}{n-1}(n-1)} = n\,\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)\ln n} = n \cdot \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \\ &= \frac{1}{n^{\varepsilon}} \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$
- つまり，$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \to 0 \ (n \to \infty)$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が小さい場合 (1)

$p \leq (1-\varepsilon)\dfrac{\ln n}{n-1}$ とする

- 先ほどと同様に，X_v と X を定義する
- このとき，$\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) \to 0$ を示したいが
$$\begin{aligned}\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &= \Pr(X = 0) \\ &\leq \Pr(X \geq 0) \\ &= 1\end{aligned}$$

単純にマルコフの不等式が使えないので，困る…

解決策

チェビシェフの不等式を使う

確率論の復習：チェビシェフの不等式

定理：チェビシェフの不等式

確率変数 X と正実数 $t > 0$ に対して，

$$\Pr(|X - \mathsf{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2}{t^2}$$

証明：マルコフの不等式より

$$\Pr(|X - \mathsf{E}[X]| \geq t) = \Pr(|X - \mathsf{E}[X]|^2 \geq t^2) \leq \frac{\mathsf{E}[|X - \mathsf{E}[X]|^2]}{t^2}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[|X - \mathsf{E}[X]|^2] &= \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])^2] = \mathsf{E}[X^2 - 2\mathsf{E}[X]X - \mathsf{E}[X]^2] \\
&= \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[2\mathsf{E}[X]X] + \mathsf{E}[\mathsf{E}[X]^2] \\
&= \mathsf{E}[X^2] - 2\mathsf{E}[X]\mathsf{E}[X] + \mathsf{E}[X]^2 \\
&= \mathsf{E}[X^2] - 2\mathsf{E}[X]^2 + \mathsf{E}[X]^2 = \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2 \qquad \square
\end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が小さい場合 (2)

$$\begin{aligned}
\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &= \Pr(X = 0) \\
&\leq \Pr(X = 0 \text{ または } X = 2\,\mathsf{E}[X]) \\
&= \Pr(|X - \mathsf{E}[X]| = \mathsf{E}[X]) \\
&\leq \Pr(|X - \mathsf{E}[X]| \geq \mathsf{E}[X]) \\
&\leq \frac{\mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2}{\mathsf{E}[X]^2} \\
&= \frac{\mathsf{E}[X^2]}{\mathsf{E}[X]^2} - 1
\end{aligned}$$

まとめ

- 既に計算済み：$\mathsf{E}[X] = n(1-p)^{n-1}$
- いまから計算：$\mathsf{E}[X^2] = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が小さい場合 (3)

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X^2] &= \mathsf{E}\left[\left(\sum_{v \in V} X_v\right)^2\right] = \mathsf{E}\left[\sum_{u \in V}\sum_{v \in V} X_u X_v\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\sum_{v \in V} X_v^2 + \sum_{u \in V}\sum_{v \in V - \{u\}} X_u X_v\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\sum_{v \in V} X_v + \sum_{u \in V}\sum_{v \in V - \{u\}} X_u X_v\right] \qquad (\because\ X_v \text{ は 0 か 1}) \\
&= \mathsf{E}\left[\sum_{v \in V} X_v\right] + \mathsf{E}\left[\sum_{u \in V}\sum_{v \in V - \{u\}} X_u X_v\right] \\
&= \mathsf{E}[X] + \sum_{u \in V}\sum_{v \in V - \{u\}} \mathsf{E}[X_u X_v]
\end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が小さい場合 (4)

u と v が異なる頂点であるとき

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X_u X_v] &= \Pr(X_u X_v = 1) = \Pr(X_u = 1 \text{ かつ } X_v = 1) \\
&= \Pr(u \text{ と } v \text{ がともに孤立点である}) \\
&= (1-p)^{2n-3}
\end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{u \in V}\sum_{v \in V - \{u\}} \mathsf{E}[X_u X_v] = n(n-1) \cdot (1-p)^{2n-3}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X^2] &= \mathsf{E}[X] + \sum_{u \in V}\sum_{v \in V - \{u\}} \mathsf{E}[X_u X_v] \\
&= n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}
\end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が小さい場合 (5)

以上の議論をまとめると，$p \leq \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n-1}$ のとき，

$$\begin{aligned}
\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{\mathsf{E}[X^2]}{\mathsf{E}[X]^2} - 1 \\
&= \frac{n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{(n(1-p)^{n-1})^2} - 1 \\
&= \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{n(n-1)(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \\
&\leq \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{n^2(1-p)^{2n-3}}{n^2(1-p)^{2n-2}} - 1 \\
&= \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{1}{1-p} - 1 \\
&\leq \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{p(n-1)} + \mathrm{e}^{p} - 1
\end{aligned}$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が小さい場合 (5) 続き

以上の議論をまとめると，$p \leq \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n-1}$ のとき，

$$\begin{aligned}
\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{p(n-1)} + \mathrm{e}^{p} - 1 \\
&\leq \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n-1}(n-1)} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
&= \frac{1}{n} n^{1/2} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
&= \frac{1}{n^{1/2}} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
&\to 0 + \mathrm{e}^{0} - 1 \quad (n \to \infty) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \to 1 \quad (n \to \infty)$$

ランダム・グラフが孤立点を含む確率：p が小さい場合 (6)

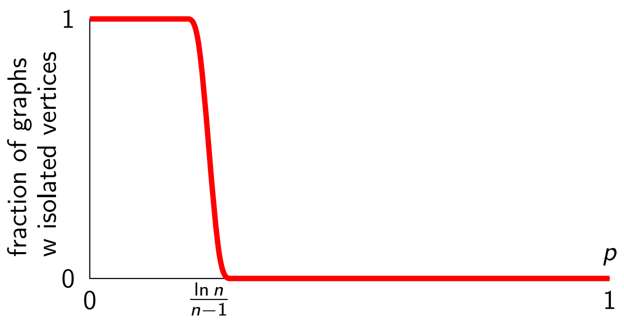
より一般に，$p \leq (1-\varepsilon)\frac{\ln n}{n-1}$ のとき (ただし，$\varepsilon > 0$)，

$$\begin{aligned}
\Pr(G \text{ が孤立点を含まない}) &\leq \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{p(n-1)} + \mathrm{e}^{p} - 1 \\
&\leq \frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{n-1}(n-1)} + \mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
&= \frac{1}{n} n^{1-\varepsilon} + \mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
&= \frac{1}{n^{\varepsilon}} + \mathrm{e}^{(1-\varepsilon)\frac{\ln n}{n-1}} - 1 \\
&\to 0 + \mathrm{e}^{0} - 1 \quad (n \to \infty) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \to 1 \quad (n \to \infty)$$

理論：まとめ

$n \to \infty$ のとき



「孤立点を持つ」という性質は **閾値現象** を持つ (**相転移** を起こす)

目次

今日のまとめ

今日の目標

確率的に定義されるグラフの性質を調べられるようになる

- ランダム・グラフの定義と性質
- ランダム・グラフの閾値現象 (相転移)