# 離散数理工学　第 7 回

離散代数：有限群の応用

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 11 月 30 日

最終更新：2021 年 11 月 10 日　14:10



## 今日の目標

**今日の目標**

有限群の応用として，以下の対象の考察ができる
- 15 パズル
- タイリング





## 目次

1. 15 パズル
2. タイリング
3. 今日のまとめ





## 15 パズル

**15 パズルとは？**

$4 \times 4$ の盤面に，$1$ から $15$ の書かれた正方形のコマが置かれ，
1 か所の空きを利用してコマを動かし，目的の配置を作成するパズル

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

$\longrightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 12 | 13 | 14 | 5 |
| 11 | | 15 | 6 |
| 10 | 9 | 8 | 7 |





## 15 パズル — サム・ロイドの問題

**15 パズルに関するサム・ロイドの問題**

次は解けるか？

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

$\longrightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

- 解けることを証明するためには，手順を示せばよい
- 解けないことを証明するためには，どうすれば？？





## 15 パズル — サム・ロイドの問題：解答

**15 パズルに関するサム・ロイドの問題**

次は解けるか？
解答：解けない

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

$\longrightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

- 解けることを証明するためには，手順を示せばよい
- 解けないことを証明するためには，どうすれば？？ → 置換を使う

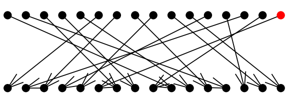




## 15 パズルから置換を得る (1)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 14 | 7 | 12 |
| 9 | 16 | 3 | 4 |
| 15 | 1 | 5 | 8 |
| 2 | 13 | 10 | 11 |

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 10 & 13 & 7 & 8 & 11 & 1 & 3 & 12 & 5 & 15 & 16 & 4 & 14 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$



偶置換





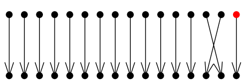
## 15 パズルから置換を得る (2) — サム・ロイドの問題

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | 16 |

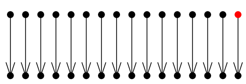
$\longrightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

$\pi_0$



奇置換

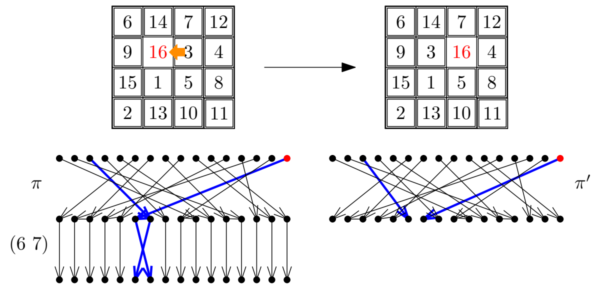


$\pi_1$

偶置換

サム・ロイドの問題：$\pi_0$ を $\pi_1$ にできるか？

## 15 パズル：1 つの移動



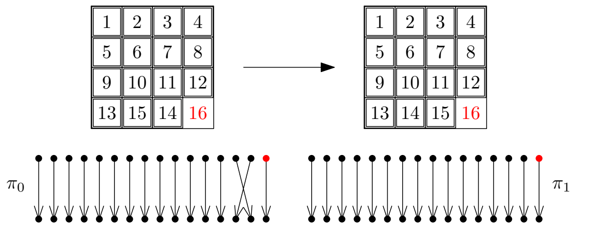

$$(6\ 7) \circ \pi = \pi'$$

つまり，コマを 1 回移動させることは 1 つの互換で表せる





## サム・ロイドの問題：別の見方 (モデル化)




**サム・ロイドの問題**

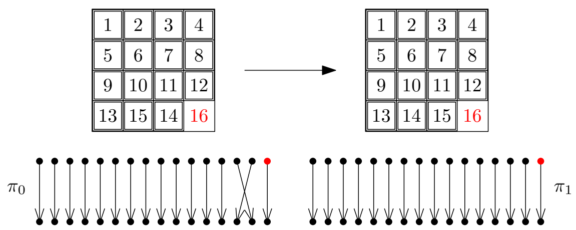
$\sigma_1 \cdots \sigma_k \pi_0 = \pi_1$ とするような互換 $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ が存在するか？

$\pi_0$ は奇置換，$\pi_1$ は偶置換なので，互換の数 $k$ は奇数でなければならない





## サム・ロイドの問題：着眼点




$\pi_0$ は奇置換，$\pi_1$ は偶置換なので，互換の数 $k$ は奇数でなければならない

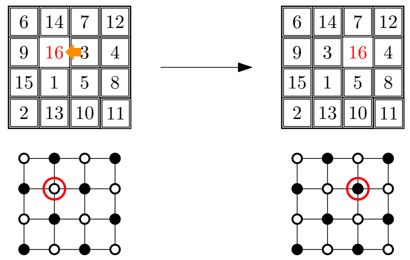
**着眼点**

- 互換によって，必ず「16」が動く
- 「16」は $\pi_0$ と $\pi_1$ のどちらでも右下にある
- ∴ 「16」を奇数回だけ動かして，元の位置に戻せるか，考える





## サム・ロイドの問題：証明の完了



- 16 個のマスを市松模様 (白黒) で塗ってみる (cf. 二部グラフ)
- 1 回の互換により，16 のあるマスの白黒が変わる
- 右下のマスは白
- つまり，白から白に行くための互換の数は偶数でないといけない
- これは，互換の数が奇数でなければならないことに矛盾 □

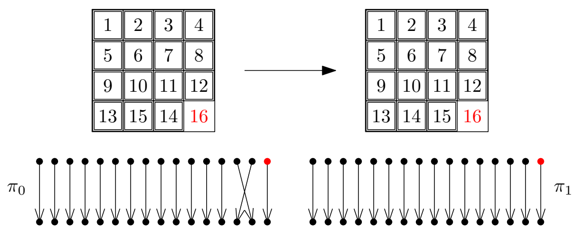




## サム・ロイドの問題：まとめ

**定理** (Johnson, Story 1879)

サム・ロイドの問題に対する解答は「解けない」である




- Wm. W. Johnson, W. E. Story, Notes on the “15” Puzzle, AJM 2 (1879) 397–404.





## サム・ロイドの問題：補足

**いまの考察から次が分かる**

初期配置から，奇置換を与えるような配置は作れない

では，偶置換を与えるような配置は必ず作れるのか？

- 実は作れる (Johnson, Story 1879)

**いまの考察から次が分かる**

考えるグラフは $4 \times 4$ の二部グラフでなくてもよい

他のグラフに対する研究は次の論文で行われている

- R. M. Wilson, Graph puzzles, homotopy, and the alternating group. JCTB 16 (1974) 86–96.





## 目次

1 15 パズル
2 タイリング
3 今日のまとめ

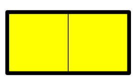


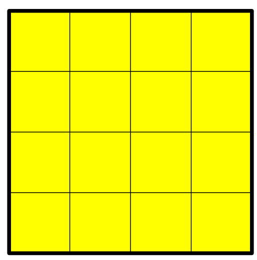


## 例 1：タイルを使って盤面を敷き詰められるか

盤面

タイル
(回転させてもよい)

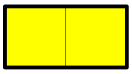


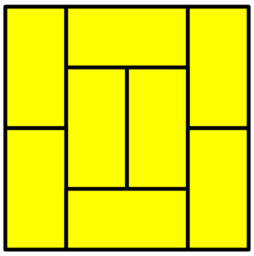


## 例 1：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 解答例

盤面

タイル
(回転させてもよい)





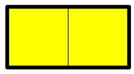


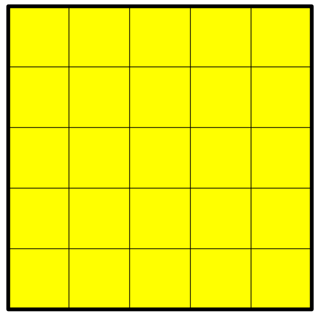


## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか

盤面

タイル
(回転させてもよい)





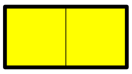


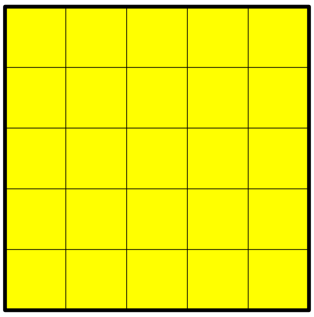


## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 解答例？？

盤面

タイル
(回転させてもよい)





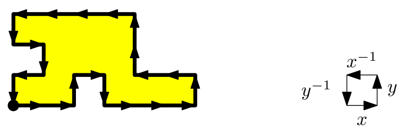
できないが，なぜ？？





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2

図形の境界語 (boundary word) を考える




$xxyxy^{-1}xxxyx^{-1}x^{-1}yyx^{-1}x^{-1}x^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y^{-1}$
$= x^2yxy^{-1}x^3yx^{-2}y^2x^{-4}y^{-1}xy^{-1}x^{-1}y^{-1}$

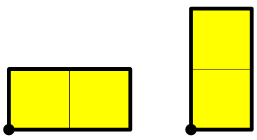


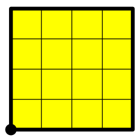


## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語

タイル

盤面





境界語

$x^2yx^{-2}y^{-1}$ $xy^2x^{-1}y^{-2}$

境界語

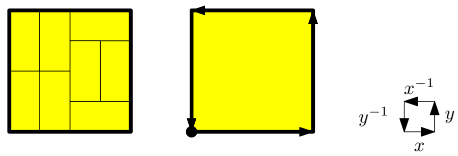
$x^4y^4x^{-4}y^{-4}$





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語の簡約

- 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$



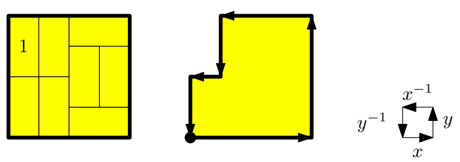

$x^4y^4x^{-4}y^{-4}$





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語の簡約

- 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$




- $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より，$x^{-1}y^{-2} = (xy^2)^{-1} = y^{-2}x^{-1}$
- したがって，

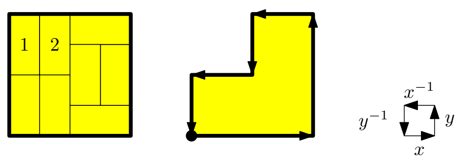
$$x^4y^4x^{-4}y^{-4} = x^4y^4x^{-3}x^{-1}y^{-2}y^{-2} = x^4y^4x^{-3}y^{-2}x^{-1}y^{-2}$$





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語の簡約

- 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$

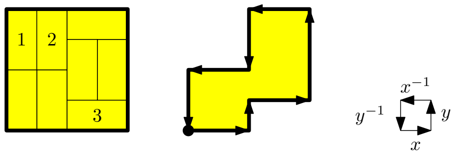



- $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より，$x^{-1}y^{-2} = (xy^2)^{-1} = y^{-2}x^{-1}$
- したがって，

$$\begin{aligned} x^4y^4x^{-3}y^{-2}x^{-1}y^{-2} &= x^4y^4x^{-2}x^{-1}y^{-2}x^{-1}y^{-2} \\ &= x^4y^4x^{-2}y^{-2}x^{-1}x^{-1}y^{-2} \\ &= x^4y^4x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$

## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語の簡約

- 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$




- $x^2yx^{-2}y^{-1} = e$ より，$x^2y = yx^2$
- したがって，

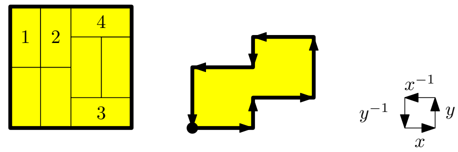
$$\begin{aligned} x^4y^4x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} &= x^2\color{red}{x^2y}y^3x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} \\ &= x^2\color{red}{yx^2}y^3x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語の簡約

- 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$




- $x^2yx^{-2}y^{-1} = e$ より，$yx^{-2}y^{-1} = x^{-2}$
- したがって，

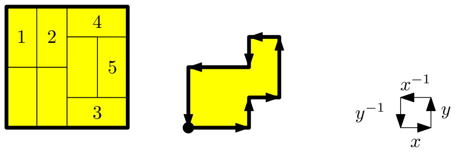
$$\begin{aligned} x^2yx^2y^3x^{-2}y^{-2}x^{-2}y^{-2} &= x^2yx^2y^2\color{red}{yx^{-2}y^{-1}}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \\ &= x^2yx^2y^2\color{red}{x^{-2}}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \\ &= x^2yx^2y^2x^{-2}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語の簡約

- 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$




- $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より，$xy^2x^{-1} = y^2$
- したがって，

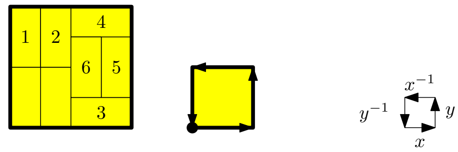
$$\begin{aligned} x^2yx^2y^2x^{-2}y^{-1}x^{-2}y^{-2} &= x^2yx\color{red}{xy^2x^{-1}}x^{-1}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \\ &= x^2yx\color{red}{y^2}x^{-1}y^{-1}x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語の簡約

- 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$




- $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より，$xy^2x^{-1}y^{-1} = y$
- したがって，

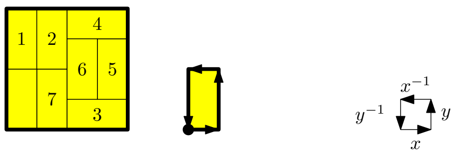
$$\begin{aligned} x^2y\color{red}{xy^2x^{-1}y^{-1}}x^{-2}y^{-2} &= x^2y\color{red}{y}x^{-2}y^{-2} \\ &= x^2y^2x^{-2}y^{-2} \end{aligned}$$





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語の簡約

- 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$




- $xy^2x^{-1}y^{-2} = e$ より，$xy^2x^{-1} = y^2$
- したがって，

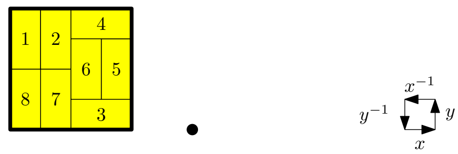
$$\begin{aligned} x^2y^2x^{-2}y^{-2} &= x\color{red}{xy^2x^{-1}}x^{-1}y^{-2} \\ &= x\color{red}{y^2}x^{-1}y^{-2} \end{aligned}$$





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：境界語の簡約

- 次の群を考える $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$




- 最終的に，

$$xy^2x^{-1}y^{-2} = e$$

結論：$G$ において，$x^4y^4x^{-4}y^{-4} = e$





## 境界語の簡約：まとめ

- $x, y$ を生成元として，タイルの境界語が単位元であるという関係式を持つ群 $G$ を考える
- 盤面がタイルで敷き詰められると仮定する
- このとき，盤面の境界語は $G$ の単位元になる

**結論** (上の考察の対偶)

盤面の境界語が $G$ の単位元でない
$\Rightarrow$ タイルで盤面を敷き詰めることは不可能

典型的な場合において，$G$ が有限群ではないので，
$G$ から有限群 (置換群) への群準同型を考えて，証明の助けとする

**性質** (前回の講義参照)

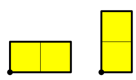
$\phi \colon G \to H$ 群準同型写像, $x \in G$，$\phi(x)$ が $H$ の単位元ではない
$\Rightarrow$ $x$ は $G$ の単位元ではない





## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：群

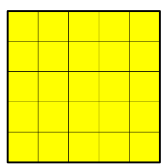
タイル



境界語

$x^2yx^{-2}y^{-1}$ $\quad$ $xy^2x^{-1}y^{-2}$

盤面



境界語

$x^5y^5x^{-5}y^{-5}$

**考える問題**

群 $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$ において，
盤面の境界語 $x^5y^5x^{-5}y^{-5}$ が単位元でないことを証明する

## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：群準同型

- 次の置換群 $H$ を考える

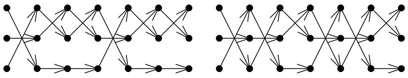
$$H = \langle (1\ 2), (1\ 3) \rangle$$

- 次で定義される群準同型写像 $\phi\colon G \to H$ を考える

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (1\ 2), \\ \phi(y) &= (1\ 3) \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{確認}}$：本当に群準同型写像なのか？

$$\begin{aligned} \phi(x^2yx^{-2}y^{-1}) &= (1\ 2)^2(1\ 3)(1\ 2)^{-2}(1\ 3)^{-1} = e \\ \phi(xy^2x^{-1}y^{-2}) &= (1\ 2)(1\ 3)^2(1\ 2)^{-1}(1\ 3)^{-2} = e \end{aligned}$$



確かに群準同型写像である

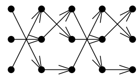




## 例 2：タイルを使って盤面を敷き詰められるか — 説明 パート 2：証明の完了

- このとき，

$$\begin{aligned} \phi(x^5y^5x^{-5}y^{-5}) &= (1\ 2)^5(1\ 3)^5(1\ 2)^{-5}(1\ 3)^{-5} \\ &= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) \\ &= (1\ 2\ 3) \neq e \end{aligned}$$



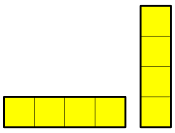
- つまり，$x^5y^5x^{-5}y^{-5}$ は $G$ の単位元ではない
- つまり，$1 \times 2$ のタイルで，$5 \times 5$ の盤面は敷き詰められない □





## 例 3：もう少し難しい例

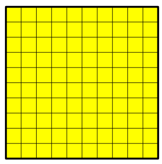
タイル



境界語

$x^4yx^{-4}y^{-1}$ $\quad$ $xy^4x^{-1}y^{-4}$

盤面：$10 \times 10$



境界語

$x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$

**考える問題**

群 $G = \langle x, y \mid x^4yx^{-4}y^{-1} = xy^4x^{-1}y^{-4} = e \rangle$ において
盤面の境界語 $x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$ が単位元ではないことを証明する





## 例 3：群準同型

- 次の置換群 $H$ を考える

$$H = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 5) \rangle$$

- 次で定義される群準同型写像 $\phi\colon G \to H$ を考える

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (1\ 2\ 3\ 4), \\ \phi(y) &= (1\ 2\ 3\ 5) \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{確認}}$：本当に群準同型写像なのか？

$$\begin{aligned} \phi(x^4yx^{-4}y^{-1}) &= (1\ 2\ 3\ 4)^4(1\ 2\ 3\ 5)(1\ 2\ 3\ 4)^{-4}(1\ 2\ 3\ 5)^{-1} = e \\ \phi(xy^4x^{-1}y^{-4}) &= (1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 5)^4(1\ 2\ 3\ 4)^{-1}(1\ 2\ 3\ 5)^{-4} = e \end{aligned}$$

確かに群準同型写像である

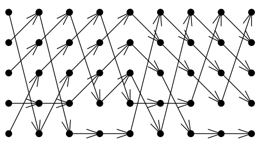




## 例 3：証明の完了

- このとき，

$$\begin{aligned} \phi(x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}) &= (1\ 2\ 3\ 4)^{10}(1\ 2\ 3\ 5)^{10}(1\ 2\ 3\ 4)^{-10}(1\ 2\ 3\ 5)^{-10} \\ &= (1\ 2\ 3\ 4)^2(1\ 2\ 3\ 5)^2(1\ 2\ 3\ 4)^{-2}(1\ 2\ 3\ 5)^{-2} \\ &= (2\ 4\ 5) \neq e \end{aligned}$$



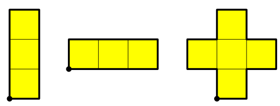
- つまり，$x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$ は $G$ の単位元ではない
- つまり，$1 \times 4$ のタイルで，$10 \times 10$ の盤面は敷き詰められない □





## 例 4：難しい例

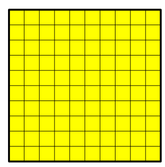
タイル



境界語

- $xy^3x^{-1}y^{-3}$
- $x^3yx^{-3}y^{-1}$
- $xyxyx^{-1}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}$

盤面：$10 \times 10$



境界語

$x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$

**考える問題**

群 $G = \left\langle x, y \;\middle|\; \begin{array}{l} xy^3x^{-1}y^{-3} = x^3yx^{-3}y^{-1} = \\ xyxyx^{-1}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1} = e \end{array} \right\rangle$ において
盤面の境界語 $x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$ が単位元ではないことを証明する





## 例 4：群準同型

- 次の置換群 $H$ を考える

$$H = \langle (1\ 2\ 3), (3\ 4\ 5) \rangle$$

- 次で定義される群準同型写像 $\phi\colon G \to H$ を考える

$$\begin{aligned} \phi(x) &= (1\ 2\ 3), \\ \phi(y) &= (3\ 4\ 5) \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{確認}}$：本当に群準同型写像なのか？

$$\begin{aligned} \phi(xy^3x^{-1}y^{-3}) &= (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)^3(1\ 2\ 3)^{-1}(3\ 4\ 5)^{-3} = e \\ \phi(x^3yx^{-3}y^{-1}) &= (1\ 2\ 3)^3(3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3)^{-3}(3\ 4\ 5)^{-1} = e \end{aligned}$$

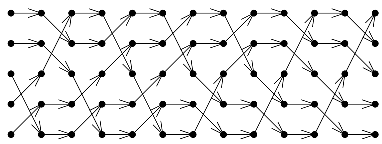




## 例 4：群準同型 (続き)

- $\boxed{\text{確認}}$：本当に群準同型写像なのか？ (続き)

$$\begin{aligned} \phi(xyxyx^{-1}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1}) &= (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5) \\ &\quad (1\ 2\ 3)^{-1}(3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3)^{-1} \\ &\quad (3\ 4\ 5)^{-1}(1\ 2\ 3)^{-1}(3\ 4\ 5)^{-1} \\ &\quad (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

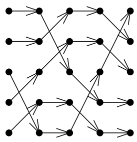


確かに，群準同型写像である

## 例 4：証明の完了

- このとき，

$$\begin{aligned}\phi(x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}) &= (1\ 2\ 3)^{10}(3\ 4\ 5)^{10}(1\ 2\ 3)^{-10}(3\ 4\ 5)^{-10}\\ &= (1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3)^{-1}(3\ 4\ 5)^{-1}\\ &= (1\ 4\ 3) \neq e\end{aligned}$$



- つまり，$x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10}$ は $G$ の単位元ではない
- つまり，$1 \times 3$ のタイルと十字のペントミノで，$10 \times 10$ の盤面は敷き詰められない □





## タイリング：補足

**境界語によるタイリング不可能性の証明**

- 発明したのは，Conway & Lagarias ('90) と Thurston ('90)
- 発展させたのは，Pak ('00), Reid ('03) ら

注意点

- タイリング不可能な場合をこの手法で必ず特定できるわけではない
- 上手に置換群を見つけるには，群についてより深く勉強する必要有

- J. H. Conway, J. C. Lagarias, Tilings with polyominoes and combinatorial group theory, JCTA 53 (1990) 183–208.
- W. Thurston, Conway's tiling group, AMM 97 (1990) 757–773.
- I. Pak, Ribbon tile invariants, TAMS 352 (2000) 5525–5561.
- M. Reid, Tile homotopy groups, LEM 49 (2003) 123–155.





## 目次

1. 15 パズル
2. タイリング
3. 今日のまとめ





## 今日の目標

**今日の目標**

有限群の応用として，以下の対象の考察ができる

- 15 パズル
- タイリング

- 離散代数のはなし は これで終わり
- 次回から は 離散確率論