離散数理工学　第 4 回

数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 11 月 2 日

最終更新：2021 年 10 月 25 日　09:44

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- 線形漸化式の解法
- より複雑な漸化式の解法

目次

数列の母関数

母関数とは？

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ の母関数とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと (x は複素数)

仮定

この冪級数は収束する

- 特に，ある定数 $r > 0$ が存在して $|x| < r$ のとき収束するとする
- つまり，$|x| < r$ のとき，$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は well-defined

収束するので，『微分積分学』，『解析学』，『複素関数論』の知識が使える

代表的な数列の母関数

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$	一般項 a_n	母関数 $A(x)$
$1, 1, 1, 1, \dots$	1	$\frac{1}{1-x}$
$1, 2, 4, 8, \dots$	2^n	$\frac{1}{1-2x}$
$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$	α^n	$\frac{1}{1-\alpha x}$
$0, 1, 2, 3, \dots$	n	$\frac{x}{(1-x)^2}$

目次

例：2 段の格子 — まとめ (第 2 回講義より)

$a_n =$ グラフ A_n における完全マッチングの総数　とするとき

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- 特性方程式を用いた方法 (前回)
- 行列を用いた方法 (前回)
- 母関数を用いた方法 (今回)

母関数を用いた漸化式の解法

0. a_0 を便宜上定める

漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- このとき，$a_2 = 2 = 1 + 1 = a_1 + a_0$
- つまり，上の漸化式は $n \geq 2$ において成立

書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

母関数を用いた漸化式の解法

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore \quad a_n x^n &= a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

母関数を用いた漸化式の解法

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - x \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \\ &= x(A(x)-1) + x^2 A(x) = xA(x) - x + x^2 A(x) \end{aligned}$$

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - x &= xA(x) - x + x^2 A(x) \\ \therefore \quad (x^2 + x - 1)A(x) &= -1 \\ \therefore \quad A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

母関数を用いた漸化式の解法

3 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

このとき，$\dfrac{-1}{x^2 + x - 1}$ の部分分数分解が必要

- 「分母 $= 0$」を x について解くと，$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となる
- したがって，ある定数 a, b が存在して

$$\frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{a}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

- この a, b を定める (次のページ)

母関数を用いた漸化式の解法

$\alpha_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とすると，$x^2 + x - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ なので，

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x^2 + x - 1} &= \frac{a}{x - \alpha_1} + \frac{b}{x - \alpha_2} \\ \therefore \quad -1 &= a(x - \alpha_2) + b(x - \alpha_1) \end{aligned}$$

この式は，任意の x で成り立つから，

- $x = \alpha_1$ とすると，$-1 = a(\alpha_1 - \alpha_2)$
- $x = \alpha_2$ とすると，$-1 = b(\alpha_2 - \alpha_1)$

したがって，$a = \dfrac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，　$b = \dfrac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

母関数を用いた漸化式の解法

したがって，

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{-1}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x - \alpha_1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x - \alpha_2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1}\frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2}\frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{5}\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)x^n \end{aligned}$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \square$$

目次

例題 1

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1\text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2\text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 1：直感を得る

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- $a_1 = 3$
- $a_2 = 4a_1 - 3^{2-1} = 4 \cdot 3 - 3^1 = 12 - 3 = 9$
- $a_3 = 4a_2 - 3^{3-1} = 4 \cdot 9 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- $a_4 = 4a_3 - 3^{4-1} = 4 \cdot 27 - 3^3 = 108 - 27 = 81$
- $\cdots$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 0

0 a_0 を便宜上定める

例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$ とする

- このとき，$a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$

したがって，考えている漸化式は次のように書き換えられる

例題 1：書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore\quad a_n x^n &= 4a_{n-1}x^n - 3^{n-1}x^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n\geq 1} a_n x^n = \sum_{n\geq 1} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} 3^{n-1}x^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 1：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} a_n x^n &= \sum_{n\geq 1} 4a_{n-1}x^n - \sum_{n\geq 1} 3^{n-1}x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n\geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x \sum_{n\geq 0} a_n x^n - x \sum_{n\geq 0} (3x)^n \\ &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \end{aligned}$$

例題 1：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore\quad (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore\quad A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-4x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 1：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって，

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して

$$a_n = 3^n$$

□

例題 2

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

例題 2：直感を得る

例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- $a_0 = 1$
- $a_1 = 3a_0 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- $a_2 = 3a_1 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$
- $a_3 = 3a_2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 3 = 63$
- $a_4 = 3a_3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 63 + 2 \cdot 4 = 197$
- $\cdots$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore \quad a_n x^n &= 3a_{n-1}x^n + 2nx^n \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n \geq 1} 2nx^n$$

母関数を $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くことにする

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $A(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1}x^n + \sum_{n \geq 1} 2nx^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} (2n+2)x^{n+1} \\ &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} nx^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} nx^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x\frac{x}{(1-x)^2} + 2x\frac{1}{1-x} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $A(x)$ に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore \quad (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore \quad A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \end{aligned}$$

$A(x)$ を x の有理関数として表現できた

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $A(x)$ の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

部分分数分解を試みる，つまり

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

となる a, b, c が一意に存在するので，それを定める (次のページ)

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数分解

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{bx}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore \quad 2x &= a(1-x)(1-3x) + bx(1-3x) + c(1-x)^2 \end{aligned}$$

この式は任意の x に対して成り立つから

- $x = 0$ とすると，$0 = a + c$
- $x = 1$ とすると，$2 = -2b$
- $x = \frac{1}{3}$ とすると，$\frac{2}{3} = \frac{4}{9}c$

したがって，$a = -\frac{3}{2}, b = -1, c = \frac{3}{2}$

例題 2：母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって，

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} - n \right) x^n \end{aligned}$$

したがって，任意の $n \geq 0$ に対して，$a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$ □

目次

例題 3

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解きたい

問題点

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束しない

実際，$n \geq 1$ のとき，$a_n = na_{n-1} + 3n - 2 > na_{n-1}$ であるので，

$$\left| \frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}} \right| > n|x|$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 1 の前に

a_n の代わりに，次の b_n を考える

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

そして，b_n の母関数 $B(x)$ を考える

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

- $B(x)$ を，数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ の指数型母関数と呼ぶことがある
- 一方で，$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を，数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ の通常型母関数と呼ぶことがある

例題 3：母関数を用いた解法 Step 1 の前に

例題 3

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad b_n = \frac{a_n}{n!} \qquad \downarrow$$

例題 3：書き換え

$$b_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{na_{n-1}}{n!} + \frac{3n}{n!} - \frac{2}{n!} = b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$b_n = b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!}$$

$$\therefore \quad b_n x^n = b_{n-1} x^n + \frac{3}{(n-1)!} x^n - \frac{2}{n!} x^n$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を $B(x)$ によって表す

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

$$\text{左辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4$$

$$\text{右辺} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n - \frac{2}{0!} \right)$$

$$= xB(x) + 3x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + 2$$

復習：テイラー展開

任意の実数 x に対して $\quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

例題 3：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を $B(x)$ に関して解く

$$B(x) - 4 = xB(x) + 3x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + 2$$

$$\therefore \quad (1-x)B(x) = 3x\,\mathrm{e}^x - 2\,\mathrm{e}^x + 6$$

$$\therefore \quad B(x) = \frac{3x}{1-x}\mathrm{e}^x - \frac{2}{1-x}\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x}$$

$$= \frac{-3(1-x)+3}{1-x}\mathrm{e}^x - \frac{2}{1-x}\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x}$$

$$= -3\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{1-x}\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x}$$

$B(x)$ を x の関数として表現できた

例題 3：母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた $B(x)$ の級数展開を導く

$$B(x) = -3\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{1-x}\mathrm{e}^x + \frac{6}{1-x}$$

$$= -3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^\ell \right) + 6\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= -3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + 6 \right) x^n$$

したがって， 任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = 6 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$

例題 3：母関数を用いた解法 まとめ

b_n の一般項

任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = 6 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$

$$\downarrow \qquad b_n = \frac{a_n}{n!} \qquad \downarrow$$

a_n の一般項

任意の $n \geq 0$ に対して，$a_n = 6n! + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} - 3$

目次

カタラン数

定義：カタラン数とは？ (復習)

自然数 $n \geq 0$ に対して，**第 n カタラン数** C_n とは，

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- $C_0 = \frac{1}{0+1}\binom{2\cdot 0}{0} = \frac{1}{1}\binom{0}{0} = 1\cdot 1 = 1$
- $C_1 = \frac{1}{1+1}\binom{2\cdot 1}{1} = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$
- $C_2 = \frac{1}{2+1}\binom{2\cdot 2}{2} = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$
- $C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{2\cdot 3}{3} = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{1}{4}\cdot 20 = 5$
- $C_4 = \frac{1}{4+1}\binom{2\cdot 4}{4} = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{1}{5}\cdot 70 = 14$
- $C_5 = \frac{1}{5+1}\binom{2\cdot 5}{5} = \frac{1}{6}\binom{10}{5} = \frac{1}{6}\cdot 252 = 42$

カタラン数の組合せ的解釈 (1)：入れ子状の括弧列

自然数 $n \geq 1$

性質：カタラン数と入れ子状の括弧列

$C_n = 2n$ 個の括弧の列で，入れ子状になっているもの

入れ子状 $=$ 左右の対応が取れている

()	()()　(())	()()()　(())()　()(())　((()))　(()())

()()()()　()(())()　()()(())　()((()))　()(()())　(())()()　(())(())

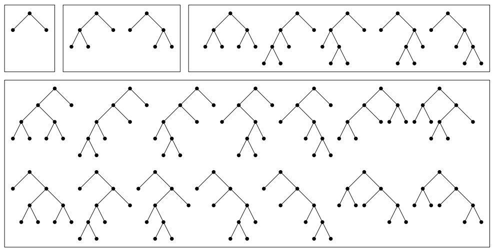
((()))()　(()())()　(()()())　((())())　(()(()))　((()()))　(((())))

カタラン数の組合せ的解釈 (2)：全二分木の総数

自然数 $n \geq 1$

性質：カタラン数と全二分木

$C_n =$ 葉の数が $n+1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数



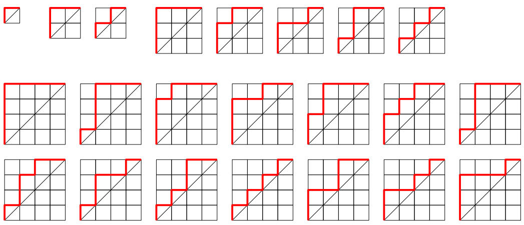
全二分木 $=$ 葉以外の頂点には子がちょうど 2 つ
順序付き $=$ 左右を区別する，ラベルなし $=$ 頂点・辺にラベル (名) がない

カタラン数の組合せ的解釈 (3)：ディック道

定義：ディック道 (Dyck path) とは？

ディック道 とは，$(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道で，
直線 $y = x$ の下側を通らないもの

$C_n = (0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数



なぜカタラン数がこれらを数えるのか？

カタラン数が数えるもの

- 入れ子状の括弧列
- 全二分木 (順序付きラベルなし)
- ディック道
- $\cdots$

疑問

カタラン数は なぜ これらを数えるのか？

今から行うこと：カタラン数の漸化式を導出すること

カタラン数の漸化式

性質：カタラン数の漸化式

カタラン数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

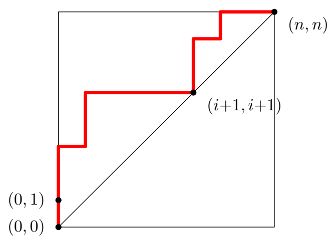
- $C_1 = C_0C_0 = 1\cdot 1 = 1$
- $C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$
- $C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5$
- $C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0 = 1\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 = 14$

証明のアイディア：組合せ的解釈を用いる

カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (1)

証明：$n \geq 1$ のとき

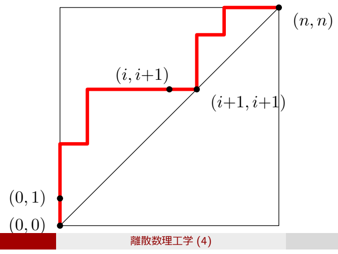
- 「はじめの一歩」は必ず「上」
- $(0,0)$ の他に，はじめて直線 $y = x$ 上に来るときを考える
- その点を $(i+1, i+1)$ とする ($i \in \{0, \ldots, n-1\}$)



カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (2)

証明 (続き)：

- $(i+1, i+1)$ に来る直前に，必ず $(i, i+1)$ にいる
- つまり，考えているディック道は以下の形をしている
  1. $(0,0)$ から $(0,1)$ に至る (← 1 通り)
  2. $(0,1)$ から $(i, i+1)$ に至る
  3. $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る (← 1 通り)
  4. $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る



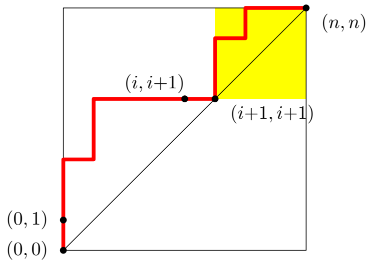
カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (3)

証明 (続き)：

4. $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る

この間に $y = x$ より下に行かないので，

$\boxed{\text{このような経路の総数}} = \boxed{(0,0) \text{ から } (n-i-1, n-i-1) \text{ に至るディック道の総数}} = \boxed{C_{n-i-1}}$



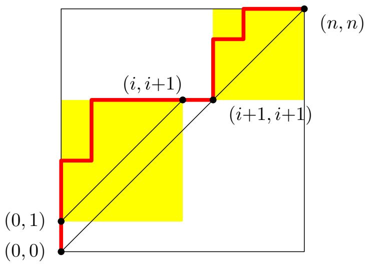
カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (4)

証明 (続き)：

2. $(0,1)$ から $(i, i+1)$ に至る

この間に $y = x$ 上に来ないので，

$\boxed{\text{このような経路の総数}} = \boxed{(0,0) \text{ から } (i,i) \text{ に至るディック道の総数}} = \boxed{C_i}$



カタラン数の漸化式：ディック道を用いた証明 (5)

証明 (続き)：

- $(i+1, i+1)$ に来る直前に，必ず $(i, i+1)$ にいる
- つまり，考えているディック道は以下の形をしている
  1. $(0,0)$ から $(0,1)$ に至る (← 1 通り)
  2. $(0,1)$ から $(i, i+1)$ に至る (← C_i 通り)
  3. $(i, i+1)$ から $(i+1, i+1)$ に至る (← 1 通り)
  4. $(i+1, i+1)$ から (n, n) に至る (← C_{n-i-1} 通り)

したがって，$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1}$ □

目次

カタラン数の漸化式

性質：カタラン数の漸化式

カタラン数

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

今から行うこと：この漸化式を解くこと ⇝ 母関数を用いる方法

カタラン数：母関数による解法 Step 1

1. 両辺に x^n を掛けて，級数を作る

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \\ C_n x^n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} \right) x^n = x \sum_{i=0}^{n-1} (C_i C_{n-i-1} x^{n-1}) \end{aligned}$$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right)$$

母関数を $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ と書くことにする

カタラン数：母関数による解法 Step 2

2. 各辺を $C(x)$ によって表す

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 = C(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(x \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \right) \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n \end{aligned}$$

カタラン数：母関数による解法 Step 2 (続き)

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} C_i C_{n-i} x^n \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} \\
&= x\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_i x^i C_j x^j \\
&= x\left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j x^j\right) = xC(x)^2
\end{aligned}
$$

カタラン数：母関数による解法 Step 3

3 得られた式を $C(x)$ に関して解く

$$
\begin{aligned}
C(x) - 1 &= xC(x)^2 \\
xC(x)^2 - C(x) + 1 &= 0 \\
C(x) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}
\end{aligned}
$$

どちらが正しいのか？

カタラン数：母関数による解法 Step 3 (続き)

ここで，$\lim_{x\to 0} C(x) = C_0 = 1$ なので，

- $C(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

  となり，合わない
- $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ だとすると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-4x)}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{1+\sqrt{1-4x}} = 1$$

  となり，合う

したがって，$C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ である

母関数を用いた漸化式の解法 Step 3 (続き 2)

3 得られた $C(x)$ の級数展開を導く

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \\
xC(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}
\end{aligned}
$$

ここで，$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ なので，

$$xC(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$$

つまり，$xC(x)$ は次の数列 $\{a_n\}$ の母関数

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ C_{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

まずは，$xC(x)$ の級数展開を導く

母関数を用いた漸化式の解法

補題 (テイラー展開を使うことで証明できる (証明は省略))

任意の実数 α に対して，$|z| < 1$ であるとき，

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n$$

ただし，

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち，$\alpha = 1/2$, $z = -4x$ とすれば，次が得られる

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n$$

母関数を用いた漸化式の解法

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad xC(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-4x)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n\right)x^n
\end{aligned}
$$

したがって，

任意の $n \geq 1$ に対して $\quad C_{n-1} = -\dfrac{1}{2}\dbinom{1/2}{n}(-4)^n$

整理

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\binom{1/2}{n}(-4)^n &= -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4)^n \\
&= -\frac{1}{2}\frac{-2(-2+4)(-2+8)\cdots(-2+4n-4)}{n!} \\
&= \frac{2\cdot 6\cdot\cdots\cdot(4n-6)}{n!} = \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}2^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{(n-1)!} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}{(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}
$$

まとめ

以上の議論より，任意の $n \geq 1$ に対して，

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

つまり，次の公式が得られる

カタラン数の公式

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

目次

今日の目標

今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- 線形漸化式の解法
- より複雑な漸化式の解法

注意

今日扱ったのは，母関数に関する初歩

- 母関数にまつわる理論は膨大
- 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長

そこでは，『複素関数論』が重要な役割を果たす