離散数理工学　第 1 回

二項係数と二項定理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 10 月 12 日

最終更新：2021 年 10 月 3 日　19:35

今日の目標

今日の目標

二項係数について さらに詳しく

- 二項係数：上界と下界
- 二項定理
- カタラン数

目次

階乗：再帰的定義 — 復習

定義：階乗とは？ (再帰的定義)

自然数 $n \geq 0$ の **階乗** とは，次で定義される自然数のこと

$$n! = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ n \cdot (n-1)! & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例：

- $0! = 1$
- $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$
- $2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$
- $\ldots$

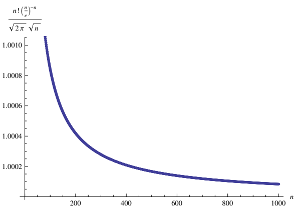
階乗：漸近公式

階乗の性質：スターリングの公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

特に，

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$



$\leftarrow \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$ のプロット

証明は『複素関数論』の
典型的な応用であるが，
ここでは行わない

階乗：上界と下界 (かかい)

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\, n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

つまり，

- $\mathrm{e}\, n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ は $n!$ の上界
- $\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ は $n!$ の下界 (かかい)

格言

漸近公式は難しい．簡単な上界・下界を使いこなす．

階乗：上界と下界 — 上界の証明

実用上，次のような「荒い評価」で十分なことも多い

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\, n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法　　(下界は演習問題)

[基底段階]　$n = 1$ のとき

- $n! = 1! = 1$
- $\mathrm{e}\, n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \mathrm{e} \cdot 1\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^1 = 1$
- したがって，$n! \leq \mathrm{e}\, n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ となる

階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き)

階乗の性質：簡単な評価

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n! \leq \mathrm{e}\, n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

上界の証明：n に関する帰納法

[帰納段階] 任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

- $k! \leq \mathrm{e}\, k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$ となると仮定

証明すること (目標)

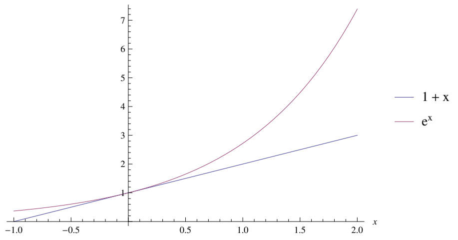
$$(k+1)! \leq \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}$$

有用な不等式

事実：有用な不等式 (演習問題)

任意の実数 x に対して

$$1 + x \le \mathrm{e}^x$$



階乗：上界と下界 — 上界の証明 (続き 2)

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)\cdot k! \\
&\le (k+1)\cdot \mathrm{e}\,k\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k \qquad \text{(帰納法の仮定)}\\
&= \mathrm{e}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}\\
&= \mathrm{e}\left(\frac{(k+1)-1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}\\
&= \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}\\
&\le \mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{k+1}}\right)^{k+1}\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}\\
&= \mathrm{e}\cdot(\mathrm{e}^{-1})\cdot \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} = \mathrm{e}(k+1)\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1} \qquad \square
\end{aligned}$$

目次

二項係数 — 復習

定義： 二項係数 とは？

自然数 a, b で $a \ge b$ を満たすものに対して，

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$$

- $\binom{a}{b}$ は「a choose b」と読む (のが普通)
- 「${}_a\mathrm{C}_b$」という記号を高校では (なぜか) 使うが，
  国際的にはあまり用いられない (通じないか，通じにくい)

二項係数：上界と下界

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \ge 1$ と任意の自然数 $b \ge 1$ に対して，$a \ge b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \le \binom{a}{b} \le \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

上界の証明：演習問題

- ヒント：まず，$\binom{a}{b} \le \frac{a^b}{b!}$ を証明する
- ヒント：階乗に対する下界を使う

二項係数：上界と下界 (下界の証明 (1))

二項係数の性質：簡単な評価

任意の自然数 $a \ge 1$ と任意の自然数 $b \ge 1$ に対して，$a \ge b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \le \binom{a}{b} \le \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

下界の証明：b に関する帰納法

- この場合の帰納法の進め方
  - [基底段階] $b = 1$ の場合を証明する
  - [帰納段階] 任意の自然数 $k \ge 1$ に対して，
    $b = k$ の場合に正しいと仮定して，
    $b = k + 1$ の場合を証明する

二項係数：上界と下界 (下界の証明 (2))

[基底段階] $b = 1$ とする．任意の $a \ge b$ を考えると

- 左辺 $= \left(\frac{a}{1}\right)^1 = a$
- 右辺 $= \binom{a}{1} = a$
- $\therefore$ 左辺 $=$ 右辺

[帰納段階] 任意の自然数 $k \ge 1$ を考える

- $b = k$ の場合に正しいと仮定する
  すなわち，任意の $a \ge b = k$ に対して
  $$\left(\frac{a}{k}\right)^k \le \binom{a}{k}$$
- 証明することは，$b = k + 1$ の場合に正しいことである
  すなわち，任意の $a \ge b = k + 1$ に対して
  $$\left(\frac{a}{k+1}\right)^{k+1} \le \binom{a}{k+1}$$

二項係数：上界と下界 (下界の証明 (3))

[帰納段階 (続き)]

$$\begin{aligned}
\binom{a}{k+1} &= \frac{a}{k+1}\binom{a-1}{k} \qquad \text{(吸収恒等式)}\\
&\ge \frac{a}{k+1}\left(\frac{a-1}{k}\right)^k \qquad \text{(帰納法の仮定)}\\
&\ge \frac{a}{k+1}\left(\frac{a}{k+1}\right)^k\\
&= \left(\frac{a}{k+1}\right)^{k+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^b \qquad \square
\end{aligned}$$

注：$a \ge k + 1$ のとき，$(a-1)(k+1) \ge ak$

目次

二項定理

性質：二項定理

任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

証明：演習問題

- ヒント：n に関する数学的帰納法 + パスカルの規則

二項定理の応用 (1)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

証明：二項定理の式において，$x = y = 1$ とすると

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \square$$

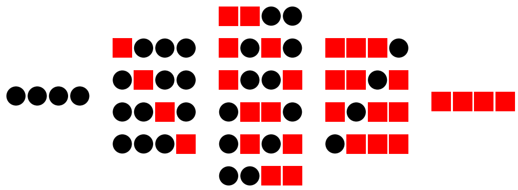
例題 1：組合せ的解釈 (着色)

例題 1

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- 右辺 $= n$ 個のものの中からいくつかに色を塗る方法の総数
- 左辺の第 k 項 $= n$ 個のものの中から k 個に色を塗る方法の総数



二項定理の応用 (2)

例題 2

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

証明：二項定理の式において，$x = -1, y = 1$ とすると

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad \square$$

二項定理の応用 (3)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

証明：二項定理より

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

特に，$(x+1)^{2n}$ における x^n の係数は $\binom{2n}{n}$

二項定理の応用 (3)：証明の続き

一方，

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right) \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} x^{k+\ell}\end{aligned}$$

つまり，この式における x^n の係数は

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

したがって，

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \qquad \square$$

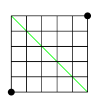
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

右辺 $= (0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の総数



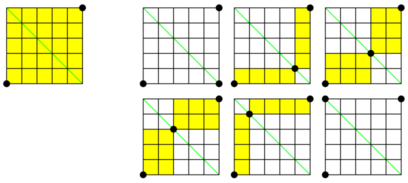
例題 3：組合せ的解釈 (格子道)

例題 3

任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

左辺の第 k 項 $=$ $(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道の中で，
$(k, n-k)$ を通るものの総数



目次

カタラン数

定義：カタラン数とは？

自然数 $n \geq 0$ に対して，**第 n カタラン数** C_n とは，

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

- $C_0 = \frac{1}{0+1}\binom{2\cdot 0}{0} = \frac{1}{1}\binom{0}{0} = 1 \cdot 1 = 1$
- $C_1 = \frac{1}{1+1}\binom{2\cdot 1}{1} = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
- $C_2 = \frac{1}{2+1}\binom{2\cdot 2}{2} = \frac{1}{3}\binom{4}{2} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$
- $C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{2\cdot 3}{3} = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$
- $C_4 = \frac{1}{4+1}\binom{2\cdot 4}{4} = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot 70 = 14$
- $C_5 = \frac{1}{5+1}\binom{2\cdot 5}{5} = \frac{1}{6}\binom{10}{5} = \frac{1}{6} \cdot 252 = 42$

Eugène C. Catalan

カタラン
(1814–1894)

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Catalan.html

カタラン数の上界と下界

第 n カタラン数の定義

任意の $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

二項係数：簡単な評価 (復習)

任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\,a}{b}\right)^b$$

したがって，カタラン数に対する以下の上界と下界が得られる

$$\frac{2^n}{n+1} \leq C_n \leq \frac{(2\,\mathrm{e})^n}{n+1}$$

∴ カタラン数は n に関して指数関数的に増加する

カタラン数の組合せ的解釈

リチャード・スタンレイ
- MIT 数学科の名誉教授
- 組合せ論の研究者 (大家)
- カタラン数の組合せ的解釈を 214 個収集した

ここでは 3 つだけ紹介

http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_P._Stanley

カタラン数の組合せ的解釈 (1)：入れ子状の括弧列

自然数 $n \geq 1$

性質：カタラン数と入れ子状の括弧列

C_n $=$ $2n$ 個の括弧の列で，入れ子状になっているもの

入れ子状 $=$ 左右の対応が取れている

()	()() (())	()()() (())() ()(()) ((())) (()())

()()()() ()(())() ()()(()) ()((())) ()(()()) (())()() (())(())

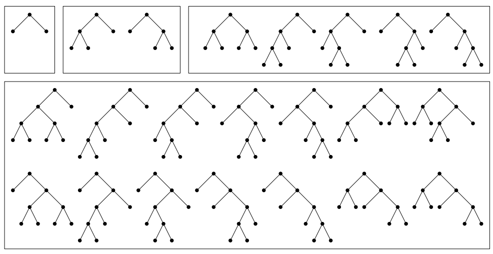
((()))() (()())() (()()()) ((())()) (()(())) ((()())) (((())))

カタラン数の組合せ的解釈 (2)：全二分木の総数

自然数 $n \geq 1$

性質：カタラン数と全二分木

C_n $=$ 葉の数が $n+1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数



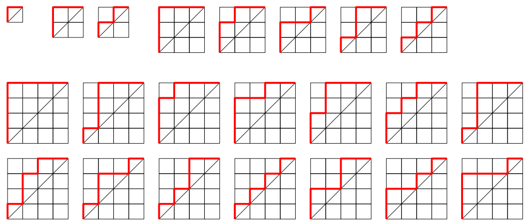
全二分木 $=$ 葉以外の頂点には子がちょうど 2 つ
順序付き $=$ 左右を区別する，ラベルなし $=$ 頂点・辺にラベル (名) がない

カタラン数の組合せ的解釈 (3)：ディック道

定義：ディック道 (Dyck path) とは？

ディック道 とは，$(0,0)$ から (n,n) へ至る格子道で，
直線 $y=x$ の下側を通らないもの

$C_n = (0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数



なぜカタラン数がこれらを数えるのか？

カタラン数が数えるもの
- 入れ子状の括弧列
- 全二分木 (順序付きラベルなし)
- ディック道
- …

疑問

カタラン数は なぜ これらを数えるのか？

解答は，後の講義で (あるいは演習問題で)

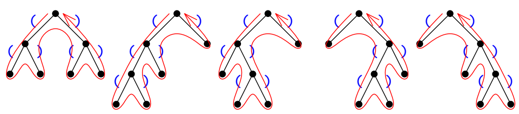
今から行うこと

これらが同じ数列で数えられることの証明

$\rightsquigarrow$ **全単射による証明** (一対一対応による証明)

入れ子状の括弧列 ↔ 順序付きラベルなし全二分木

(())()　((()))　(()())　()(())　()()()



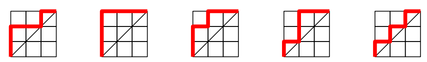
- 括弧列の「(」 ↔ 二分木で，左に降りる辺
- 括弧列の「)」 ↔ 二分木で，右の降りる辺

「左優先」の深さ優先探索で辺を訪問する順に従って，括弧列が得られる

入れ子状の括弧列 ↔ ディック道

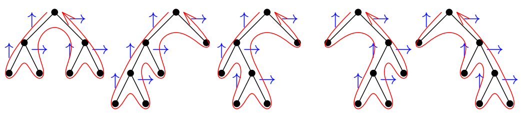
(())()　((()))　(()())　()(())　()()()

↑↑→→↑→　↑↑↑→→→　↑↑→↑→→　↑→↑↑→→　↑→↑→↑→

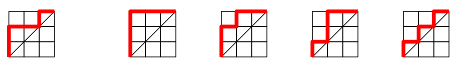


- 括弧列の「(」 ↔ ディック道で，上に進む
- 括弧列の「)」 ↔ ディック道で，右に進む

全二分木 ↔ ディック道



↑↑→→↑→　↑↑↑→→→　↑↑→↑→→　↑→↑↑→→　↑→↑→↑→



- 二分木で，左に降りる辺 ↔ ディック道で，上に進む
- 二分木で，右の降りる辺 ↔ ディック道で，右に進む

「左優先」の深さ優先探索で辺を訪問する順に従って，進み方が得られる

目次

次回の予告

今日のまとめ

二項係数について さらに詳しく
- 二項係数：上界と下界
- 二項定理
- カタラン数

格言

漸近公式は難しい．簡単な上界・下界を使いこなす．

次回の予告

漸化式を立てられるようになる
- 組合せ構造の数え上げ
- アルゴリズムの計算量