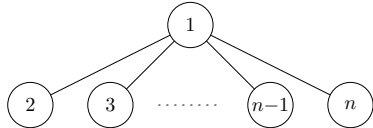


提出締切：2022 年 2 月 1 日 午前 9:00

授業内問題 13.1 $n \geq 2$ として、次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える。これは頂点 1 に他の $n - 1$ 個の頂点がすべて隣接するが、その他に隣接関係が存在しないものである。



このとき、頂点 1 から頂点 n への到達時刻の期待値を求めよ。

復習問題 13.2 1 人のギャンブラーが n 万円を所持している。彼が賭けを 1 回行うごとに、 $1/2$ の確率で所持金は 1 万円増加し、 $1/2$ の確率で所持金は 1 万円減少する。賭けは繰り返し行われ、所持金が 0 万円か $3n$ 万円になると終了する。以下の問いに答えよ。

- 所持金が k 万円であるとき、0 万円で終了する確率を p_k で表す。すなわち、

$$p_k = \Pr(\exists t \geq 0: X_t = 0 \mid X_0 = k)$$

と定義する。このとき、次の漸化式が成立することを示せ。

$$p_k = \begin{cases} 1 & (k = 0 \text{ のとき}), \\ \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} & (1 \leq k \leq 3n - 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (k = 3n \text{ のとき}). \end{cases}$$

- 上の小問の漸化式を解き、任意の $k \in \{0, \dots, 3n\}$ に対する p_k が何であるか、定めよ。

復習問題 13.3 問題 13.2 と同じ状況を考える。ギャンブラーが k 万円所持しているとき、そこから終了までに賭けを行う回数の期待値を $T_{n,k}$ で表す。すなわち、

$$T_{n,k} = E[\min\{t \mid X_t \in \{0, 3n\}\} \mid X_0 = k]$$

とする。以下の問いに答えよ。

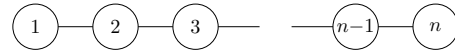
- $T_{n,0} = T_{n,3n} = 0$ となることを示せ。
- $1 \leq k \leq 3n - 1$ のとき、次が成り立つことを示せ。

$$T_{n,k} = 1 + \frac{1}{2}T_{n,k-1} + \frac{1}{2}T_{n,k+1}.$$

(ヒント：問題 13.6 を用いてもよい。)

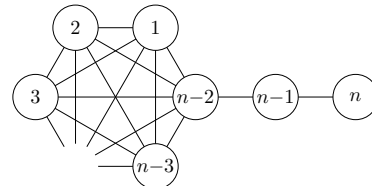
- 上の小問で得られた漸化式を解き、 $T_{n,k}$ の一般項を定めよ。

復習問題 13.4 $n \geq 1$ として、次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える。これは頂点数 n の道である。



このとき、頂点 1 から頂点 n への到達時刻の期待値を求めよ。

復習問題 13.5 $n \geq 3$ として、次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える。これは頂点数 $n - 2$ の完全グラフに長さ 2 の道が貼り付けられたものである。



このとき、頂点 1 から頂点 n への到達時刻の期待値を求めよ。

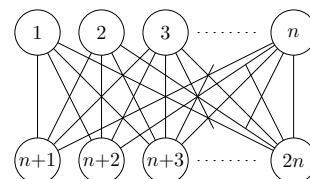
補足問題 13.6 任意の自然数値確率変数 X, Y と事象 A に対して、 $\Pr(A) \neq 0$ のとき

$$E[X \mid A] = \sum_{i \in \mathbb{N}} E[X \mid A \text{ かつ } Y = i] \Pr(Y = i \mid A)$$

が成り立つことを証明せよ。

追加問題 13.7 問題 13.2 の状況において、彼が賭けを 1 回行うごとに、 $2/3$ の確率で所持金は 1 万円増加し、 $1/3$ の確率で所持金は 1 万円減少するとする。このとき、所持金が 0 万円となって終了する確率を計算せよ。

追加問題 13.8 $n \geq 2$ として、次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える。これはそれぞれの部集合の頂点数が n であるような完全二部グラフである。



このとき、頂点 1 から頂点 $2n$ への到達時刻の期待値を求めよ。