

提出締切：2021 年 12 月 21 日 午前 9:00

**授業内問題 8.1** 公平な (6 面) サイコロでは, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目がそれぞれ  $1/6$  の確率で出る. このサイコロを続けて何回か独立に投げることを考える. 以下の量が何になるか, 答えよ. ただし,  $n \geq 1$  は整数であるとする.

1.  $n$  回投げて, 1 が  $n$  回出る確率.
2.  $n$  回投げて, 1 が一度も出ない確率.
3.  $n$  回投げて, 1 が一度は出る確率.
4.  $n$  回投げたとき, 1 が出る回数の期待値.
5. 1 が出るまで投げ続けたとき, 投げる回数の期待値.
6. 1, 2, 3, 4, 5, 6 のすべてが出るまで投げ続けたとき, 投げる回数の期待値.
7. 1, 2, 3 のすべてが出るまで投げ続けたとき, 投げる回数の期待値.

**授業内問題 8.2** 演習問題 8.1 の設定を考える.  $n$  回サイコロを投げたとき, 1 の出る回数が  $n/3$  以上になる確率が  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束することを証明せよ.

**復習問題 8.3** 表の出る確率が  $p$  であり, 裏の出る確率が  $1-p$  であるような硬貨を考える. ただし,  $0 < p \leq 1$  である. この硬貨を続けて何回か独立に投げることを考える. 以下の量が何になるか, 答えよ. ただし,  $n \geq 1$  は整数であるとする.

1.  $n$  回投げて, 表が  $n$  回出る確率.
2.  $n$  回投げて, 表が一度も出ない確率.
3.  $n$  回投げて, 表が一度は出る確率.
4.  $n$  回投げたとき, 表が出る回数の期待値. (ヒント: 演習問題 8.8 の結果を用いてもよい.)
5. 表が出るまで投げ続けたとき, 投げる回数の期待値. (ヒント: 演習問題 8.9 の結果を用いてもよい.)

**復習問題 8.4** 演習問題 8.3 の設定を考える.  $n$  回硬貨を投げたとき, 表の出る回数が  $2pn$  以上になる確率が  $n \rightarrow \infty$  のとき 0 に収束することを証明せよ.

**復習問題 8.5** 商品を買うと  $n$  種類の景品の中の 1 つが当たる. その確率は商品の間で同一かつ独立であり,  $\frac{1}{n}$  である. 全種類の景品を集め切るまでに購入する商品の数の期待値が  $nH_n$  となることを証明せよ. ただし,  $H_n$  は第  $n$  調和数であり,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

と定義される. (ヒント: 「景品を  $j$  種類所持した瞬間から, 新しい景品が当たるまでに購入した商品の数」を確率変数とし, その期待値をまず計算せよ.)

**復習問題 8.6** 演習問題 8.5 の設定を考える. このとき, 商品購入回数が  $2nH_n$  を上回る確率が  $\frac{1}{n+1}$  以下になることを証明せよ.

**復習問題 8.7** 1 年の日数が  $k$  であり, 部屋には  $m$  人の学生がいるとする. 学生  $i$  の誕生日が  $j$  である確率は, すべての  $i$  と  $j$  に対して  $\frac{1}{k}$  であり, それらの事象は互いに独立であるとする.

$m \geq \sqrt{(2 \ln 2)k} + 1$  のとき, この部屋に同じ誕生日を持つ 2 人の学生がいる確率は  $\frac{1}{2}$  以上になることを証明せよ.

**補足問題 8.8** 任意の複素数  $x, y$  と任意の自然数  $n \geq 1$  に対して, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

(ヒント: 二項定理を用いてもよい.)

**補足問題 8.9** 任意の実数  $0 < r < 1$  に対して, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot r^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

**補足問題 8.10** 任意の自然数  $n \geq 1$  に対して, 第  $n$  調和数  $H_n$  は次の式

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

で定義される. 第  $n$  調和数  $H_n$  が以下の不等式を満たすことを証明せよ.

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

**追加問題 8.11** 演習問題 8.3 の設定を考える. 以下の問いに答えよ.

1.  $n$  回硬貨を投げたとき, 表の出る回数を表す確率変数を  $X$  とする. 定数  $c > 1$  に対して  $E[c^X]$  が何であるか, 答えよ.
2. 次の不等式を証明せよ.

$$\Pr(X \geq 2pn) \leq \left( \frac{1 + (c-1)p}{c^{2p}} \right)^n.$$

3.  $p = 1/4$  のとき, この右辺を最小とする  $c$  を求めよ.

**追加問題 8.12** 演習問題 8.5 の設定を考える. 任意の定数  $c > 0$  に対して, 商品購入回数が  $n \ln n + cn$  を上回る確率が  $e^{-c}$  以下になることを証明せよ.

**追加問題 8.13** 演習問題 8.5 の設定を考える. 自然数  $k \geq 1$  に対して,  $k$  個の商品を購入した後に得られる景品の種類数を確率変数  $X$  で表す. このとき,  $X$  の期待値を計算せよ. (ヒント: 標示確率変数をうまく用いてみよ. 景品  $i$  に対して,  $X_i$  を  $i$  が  $k$  個の商品の購入によって得られなかったときに 1, 得られたときに 0 となる確率変数とする. このとき,  $X = n - \sum_{i=1}^n X_i$  と表されることをまず確認せよ.)