

提出締切：2021 年 12 月 7 日 午前 9:00

授業内問題 7.1 15 パズルの変種として、次のような「5 パズル」を考える。これは 2×3 の盤面に、1 から 5 の書かれた正方形のコマが 1 つずつ置かれ、1 か所の空きを利用してコマを動かし、目的の配置を作成するパズルである。

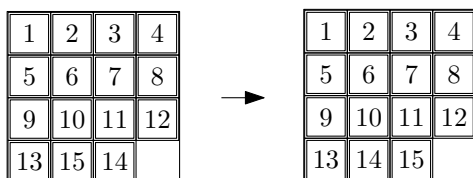
左側の状態から始めて、上で書いた規則によりコマを動かすことで、右側の状態を作成することができるか、その可否を証明せよ。



授業内問題 7.2 上の問題と同様に「5 パズル」を考える。左側の状態から始めて、上で書いた規則によりコマを動かすことで、右側の状態を作成することができるか、その可否を証明せよ。

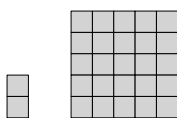


復習問題 7.3 15 パズルとは、 4×4 の盤面に、1 から 15 の書かれた正方形のコマが 1 つずつ置かれ、1 か所の空きを利用してコマを動かし、目的の配置を作成するパズルである。サム・ロイド (Sam Lloyd) は下の図にある左の配置から右の配置が作成できるか、尋ねた。



サム・ロイドの問題に対する正しい解答は「作成できない」である。なぜ作成できないのか、証明せよ。

復習問題 7.4 1×2 の長方形 (回転させてもよい) によって 5×5 の正方形を敷き詰められないことを、以下の流れに沿って証明せよ。



- 群 $G = \langle x, y \mid x^2yx^{-2}y^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = e \rangle$ と置換群 $H = \langle (1\ 2), (1\ 3) \rangle$ に対して、次で定義される群

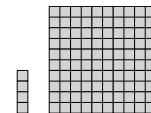
準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ を考える。

$$\phi(x) = (1\ 2), \quad \phi(y) = (1\ 3).$$

この ϕ が本当に群準同型写像であることを確認せよ。

- 以上の設定の下で、 $\phi(x^5y^5x^{-5}y^{-5})$ が恒等置換ではないことを証明せよ。
- 以上の考察を用いて、 1×2 の長方形 (回転させてもよい) によって 5×5 の正方形を敷き詰められないことを証明せよ。

復習問題 7.5 1×4 の長方形 (回転させてもよい) によって 10×10 の正方形を敷き詰められないことを、以下の流れに沿って証明せよ。



- 次の群

$$G = \langle x, y \mid x^4yx^{-4}y^{-1} = xy^4x^{-1}y^{-4} = e \rangle.$$

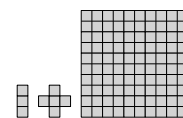
と置換群 $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 5) \rangle$ に対して、次で定義される群準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ を考える。

$$\phi(x) = (1\ 2\ 3\ 4), \quad \phi(y) = (1\ 2\ 3\ 5).$$

この ϕ が本当に群準同型写像であることを確認せよ。

- 以上の設定の下で、 $\phi(x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10})$ が恒等置換ではないことを証明せよ。
- 以上の考察を用いて、 1×4 の長方形 (回転させてもよい) によって 10×10 の正方形を敷き詰められないことを証明せよ。

復習問題 7.6 1×3 の長方形 (回転させてもよい) と十字型のペンタミノによって 10×10 の正方形を敷き詰められないことを、以下の流れに沿って証明せよ。



- 次の群

$$G = \left\langle x, y \mid \begin{array}{l} xy^3x^{-1}y^{-3} = x^3yx^{-3}y^{-1} = \\ xyxyx^{-1}yx^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}xy^{-1} = e \end{array} \right\rangle$$

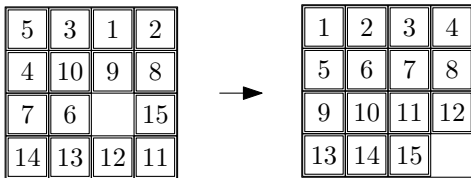
と置換群 $H = \langle (1\ 2\ 3), (3\ 4\ 5) \rangle$ に対して、次で定義される群準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ を考える。

$$\phi(x) = (1\ 2\ 3), \quad \phi(y) = (3\ 4\ 5).$$

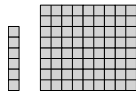
この ϕ が本当に群準同型写像であることを確認せよ。

2. 以上の設定の下で、 $\phi(x^{10}y^{10}x^{-10}y^{-10})$ が恒等置換ではないことを証明せよ。
3. 以上の考察を用いて、 1×3 の長方形 (回転させてもよい) と十字型のペントミノによって 10×10 の正方形を敷き詰められないことを証明せよ。

追加問題 7.7 問題 7.3 にある 15 パズルを考える。下の図にある左の配置から右の配置が作成できるか、できないか、理由を付けて答えよ。



追加問題 7.8 1×6 の長方形 (回転させてもよい) によって 9×8 の長方形を敷き詰められないことを、以下の流れに沿って証明せよ。



1. 次の群

$$G = \langle x, y \mid x^6 y x^{-6} y^{-1} = x y^6 x^{-1} y^{-6} = e \rangle.$$

と置換群 $H = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), (1\ 3\ 5\ 2\ 4\ 6) \rangle$ に対して、次で定義される群準同型写像 $\phi: G \rightarrow H$ を考える。

$$\phi(x) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6), \quad \phi(y) = (1\ 3\ 5\ 2\ 4\ 6).$$

この ϕ が本当に群準同型写像であることを確認せよ。

2. 以上の設定の下で、 $\phi(x^9 y^8 x^{-9} y^{-8})$ が恒等置換ではないことを証明せよ。
3. 以上の考察を用いて、 1×6 の長方形 (回転させてもよい) によって 9×8 の長方形を敷き詰められないことを証明せよ。
4. 以上の設定の下で、 $\phi(x^8 y^9 x^{-8} y^{-9})$ が恒等置換であることを証明せよ。(補足: つまり、 $\phi(x^8 y^9 x^{-8} y^{-9})$ が恒等置換であるからといって、敷き詰められるとは言えないことが分かる。)
5. 以上の考察を用いて、任意の自然数 $m \geq 1$ と $n \geq 1$ に対して、 1×6 の長方形 (回転させてもよい) によ

て $(6m+3) \times (6n+2)$ の長方形を敷き詰められないことを証明せよ。