提出締切： 2021 年 11 月 30 日 午前 9:00

授業内問題 6.1 集合 $G = \{a, b, c, d\}$ と G 上の演算 $\circ$ が群を成し，次の群表を持つとする．しかし，その一部が「?」となり，不明である．これが群であるという条件から，「?」となっている部分を復元せよ．また，この群の単位元と，各要素の逆元が何であるか，答えよ．

$\circ$	a	b	c	d
a	?	?	d	?
b	a	?	?	?
c	?	c	?	?
d	c	?	?	a

注意：G は集合であるので，同じ要素があってはならない．例えば，$a = b$ となってはならないことに注意せよ．

復習問題 6.2 集合 $G = \{x, y, z, w\}$ と G 上の演算 $\circ$ が群を成し，次の群表を持つとする．その群の単位元と，各要素の逆元が何であるか，答えよ．

1.

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	z	w	x
z	z	w	x	y
w	w	x	y	z

2.

$\circ$	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	x	w	z
z	z	w	x	y
w	w	z	y	x

復習問題 6.3 任意の群 G を考える．任意の $x, y \in G$ に対して $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 6.4 次の表示を持つ群 G に対して，その群表を書け．また，G の各要素の逆元が何であるか，答えよ．ただし，e は G の単位元を表す．

1. $G = \langle a \mid a^4 = e \rangle$.
2. $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba \rangle$.
3. $G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = abab = e \rangle$.

復習問題 6.5 問題 6.4.2 にある群 G において，ab^3a^3b を簡約せよ．

復習問題 6.6 問題 6.4.3 にある群 G において，aba と a^2ba^2b を簡約せよ．

復習問題 6.7 3 次対称群

$$S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

と有限群

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = ababab = e \rangle$$

を考える．ここで，写像 $\phi\colon S_3 \to G$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} \phi(e) &= e, & \phi((1\ 2)) &= a, \\ \phi((1\ 3)) &= b, & \phi((2\ 3)) &= bab, \\ \phi((1\ 2\ 3)) &= ba, & \phi((1\ 3\ 2)) &= ab. \end{aligned}$$

このとき，ϕ が S_3 から G への同型写像であることを証明せよ．

復習問題 6.8 群 $(G, \circ)$ と群 $(H, \star)$ の単位元がそれぞれ e_G, e_H であるとする．任意の群準同型写像 $\phi\colon G \to H$ に対して，$\phi(e_G) = e_H$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 6.9 次に挙げる各集合と演算の組は群にならない．なぜならないのか，説明せよ．

1. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は乗法 $\times$ に関して群にならない．
2. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は乗法 $\times$ に関して群にならない．
3. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は減算 $-$ に関して群にならない．

補足問題 6.10 3 次対称群

$$S_3 = \{e, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

と有限群

$$H = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = xyxy = yxyx = xy^2xy^2 = e \rangle$$

を考える．ここで，写像 $\psi\colon S_3 \to H$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} \psi(e) &= e, & \psi((1\ 2)) &= x, \\ \psi((1\ 3)) &= yx, & \psi((2\ 3)) &= xy, \\ \psi((1\ 2\ 3)) &= y, & \psi((1\ 3\ 2)) &= y^2. \end{aligned}$$

このとき，ψ が S_3 から H への同型写像であることを証明せよ．

補足問題 6.11 任意の群 $(G, \circ)$，群 $(H, \star)$，群準同型写像 $\phi\colon G \to H$ を考える．このとき，任意の $x \in G$ に対して，$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$ が成り立つことを証明せよ．（ヒント：演習問題 6.8 を用いてもよい．）

追加問題 6.12 任意の群 G を考える．任意の要素 $x \in G$ に対して $(x^{-1})^{-1} = x$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 6.13 次の表示を持つ群 G の群表を答えよ．また，G の位数，および，各要素の逆元が何であるか，答えよ．そして，G がアーベル群であるか，非可換群であるか，答えよ．ただし，e は G の単位元を表す．

1. $G = \langle a, b \mid a^4 = e, a^2 = b^2, aba = b \rangle$．（ヒント：位数は 8 である．）
2. $G = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = ababab = e \rangle$．（ヒント：位数は 12 である．ちょっと面倒．）

追加問題 6.14 群 G_1, G_2, G_3 に対して，G_1 から G_2 への群準同型写像 $\phi_1 \colon G_1 \to G_2$ と G_2 から G_3 への群準同型写像 $\phi_2 \colon G_2 \to G_3$ が存在するとする．このとき，合成写像 $\phi_2 \circ \phi_1 \colon G_1 \to G_3$ は G_1 から G_3 への群準同型写像であることを証明せよ．

追加問題 6.15 群 G, H に対して，G から H への群同型写像 $\phi \colon G \to H$ が存在するとする．このとき，G がアーベル群であるならば，H もアーベル群であることを証明せよ．

追加問題 6.16 群 $(G, \circ)$ は $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ であり，任意の $x, y \in G$ に対して

$$x \circ y = (x + y) \bmod 6$$

として定義されるものである．また，群 $(H, \star)$ は $H = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ であり，任意の $x, y \in H$ に対して

$$x \star y = xy \bmod 9$$

として定義されるものである．以下の問いに答えよ．

1. $(G, \circ)$ と $(H, \star)$ の群表を書き，$(G, \circ)$ と $(H, \star)$ が確かに群であることを確かめよ．
2. 群 $(G, \circ)$ と $(H, \star)$ が同型であることを証明せよ．