離散数理工学 (5)　　　　**2021 年 11 月 9 日**
演習問題　　　　岡本 吉央

提出締切： 2021 年 11 月 16 日 午前 9:00

授業内問題 5.1 集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換 π, σ を

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

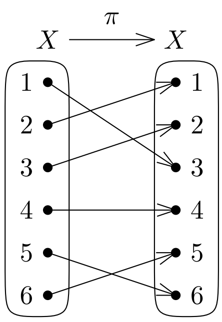
と定義する．以下の問いに答えよ．

1. 次の置換が何であるか，二行記法により答えよ．
   (a) $\pi \circ \sigma$.
   (b) $\sigma \circ \pi$.
   (c) π^{-1}.
   (d) σ^{-1}.
2. 置換 π，σ をそれぞれ巡回記法で表せ．

授業内問題 5.2 次に挙げる $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換が偶置換であるか，奇置換であるか，答えよ．

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

復習問題 5.3 次の図で表される集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換 π を二行記法，そして，巡回記法によって書き表せ．



復習問題 5.4 集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換 π, σ を

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

と定義するとき，次の置換が何であるか，二行記法により答えよ．

1. $\pi \circ \sigma$.
2. π^{-1}.

復習問題 5.5 次に挙げる $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換が偶置換であるか，奇置換であるか，答えよ．

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

復習問題 5.6 集合 $X = \{1, 2, 3\}$ 上の置換群 G で，次に挙げる S が生成するものは何であるか，答えよ．

1. $S = \{(1\ 2\ 3)\}$.
2. $S = \{(1\ 2), (2\ 3)\}$.

補足問題 5.7 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ を考える．このとき，f と g が全単射ならば，$g \circ f$ も全単射であることを証明せよ．

補足問題 5.8 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ を考える．このとき，f と g が全単射ならば，$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 5.9 有限集合 X 上の任意の置換の有限集合 S を考える．このとき，ある自然数 $k \geq 0$ とある置換 $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k \in S$ を用いて $e\pi_1\pi_2 \cdots \pi_k$ と表すことのできる置換をすべて集めて作った置換の集合を $\langle S \rangle$ とする．ただし，e は恒等置換である．このとき，$\langle S \rangle$ は X 上の置換群であることを証明せよ．

追加問題 5.10 有限集合 X 上の置換 π，σ を考える．置換 π，σ がどちらも奇置換であるとき，$\pi \circ \sigma$ は偶置換であることを証明せよ．

追加問題 5.11 集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の置換群 G で，次に挙げる S が生成するものは何であるか，答えよ．

1. $S = \{(1\ 2\ 3\ 4)\}$.
2. $S = \{(1\ 2), (3\ 4)\}$.
3. $S = \{(1\ 2)(3\ 4)\}$.

追加問題 5.12 任意の正整数 n を考える．集合 $\{1,\ldots,n\}$ 上の 2 つの置換群 G_1 と G_2 に対して, $G_1 \cap G_2$ も $\{1,\ldots,n\}$ 上の置換群であることを証明せよ．