提出締切： 2021 年 11 月 9 日 午前 9:00

授業内問題 4.1 次の漸化式を考える．

$$x_n = \begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 11 & (n=2 \text{ のとき}) \\ 4x_{n-1} - x_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 x_n を閉じた形で与えよ．

授業内問題 4.2 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，第 n カタラン数 C_n は葉の数が $n+1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数を表すものであった．その組合せ的解釈を用いて，カタラン数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ が次の漸化式を満たすことを証明せよ．

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

復習問題 4.3 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 2 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．

復習問題 4.4 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．

復習問題 4.5 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．

復習問題 4.6 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n=0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$b_n = a_n/n!$ とする．母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 b_n を閉じた形で与えよ．
2. 小問 1 の結果を用いて，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．

復習問題 4.7 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，第 n カタラン数 C_n は $(0,0)$ から (n,n) へ至るディック道の総数を表すものであった．

1. その組合せ的解釈を用いて，カタラン数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ が次の漸化式を満たすことを証明せよ．

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

2. カタラン数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ の母関数 $C(x)$ が何であるか，x の関数として答えよ．
3. (発展問題) その母関数 $C(x)$ を用いて，任意の自然数 $n \geq 0$ に対して

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 4.8 次の漸化式を考える．

$$d_n = \begin{cases} 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n=2 \text{ のとき}) \\ d_{n-1} + 2d_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{d_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 d_n を閉じた形で与えよ．

追加問題 4.9 次の漸化式を考える．

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 2b_{n-1} - 3n + 9 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 b_n を閉じた形で与えよ．

追加問題 4.10 次の漸化式を考える．

$$c_n = \begin{cases} 3 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって，数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ の一般項 c_n を閉じた形で与えよ．

追加問題 4.11 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 0\ \text{のとき}) \\ na_{n-1} + 2n + (-1)^n & (n \geq 1\ \text{のとき}) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$b_n = a_n/n!$ とする．母関数を用いる方法によって，数列 $\{b_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 b_n を閉じた形で与えよ．
2. 小問 1 の結果を用いて，数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．