提出締切： 2021 年 11 月 2 日 午前 9:00

授業内問題 3.1 次の漸化式を考える．

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ b_{n-2} + 2c_{n-1} & (n \geq 4，\text{偶数のとき}), \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-2} & (n \geq 3，\text{奇数のとき}). \end{cases}$$

1. 任意の自然数 $k \geq 1$ に対して，$x_k = b_{2k}$ とすることで，数列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ を定義する．次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$x_k = \begin{cases} 3 & (k = 1 \text{ のとき}) \\ 11 & (k = 2 \text{ のとき}) \\ 4x_{k-1} - x_{k-2} & (k \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

2. 数列 $\{x_k\}_{k\geq 1}$ の一般項を閉じた形で与えよ．

授業内問題 3.2 次の漸化式を考える．

$$q_n \begin{cases} = 1 & (n = 0, 1 \text{ のとき}) \\ \leq q_{\lfloor 2n/9 \rfloor} + q_{\lfloor 5n/9 \rfloor} + 8n & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，$q_n = O(n)$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.3 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．

復習問題 3.4 次の漸化式を考える．

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，

$$f_n = O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.5 次の漸化式を考える．

$$g_n \begin{cases} = 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，

$$f_n = O(\log n)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.6 次の数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数 $A(x)$ が何であるか，x の有理関数として答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$.
2. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$.
3. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$.
4. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n + 1$.

補足問題 3.7 演習問題 3.1 にある数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ と $\{c_n\}_{n\geq 1}$ を考える．次の問いに答えよ．

1. 任意の自然数 $k \geq 1$ に対して $y_k = c_{2k-1}$ とすることで，数列 $\{y_k\}_{k\geq 1}$ を定義する．次の漸化式が成り立つことを証明せよ．

$$y_k = \begin{cases} 1 & (k = 1 \text{ のとき}) \\ 4 & (k = 2 \text{ のとき}) \\ 4y_{k-1} - y_{k-2} & (k \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

2. 数列 $\{y_k\}_{k\geq 1}$ の一般項 y_k を閉じた形で与えよ．

追加問題 3.8 次の漸化式を考える．

$$d_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ d_{n-1} + 2d_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{d_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 d_n を閉じた形で与えよ．

追加問題 3.9 次の漸化式を考える．

$$t_n \begin{cases} = 1 & (n = 0, 1 \text{ のとき}) \\ \leq t_{\lceil n/2 \rceil} + t_{\lfloor n/2 \rfloor} + 5n & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，$q_n = O(n \log n)$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 3.10 次の数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数 $A(x)$ が何であるか，x の有理関数として答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n^2$.
2. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$a_n = \begin{cases} \binom{100}{n} & (n \leq 100 \text{ のとき}), \\ 0 & (n > 100 \text{ のとき}). \end{cases}$$

追加問題 3.11 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数が $A(x)$ であるとき，次の数列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ の母関数はどう書けるか？ 答えよ．

1. 任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = 3 + a_n$.
2. 任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = (-1)^n a_n$.
3. 任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = a_{n+2}$.（ヒント：$\{b_n\}$ の母関数の中に，a_0 と a_1 が現れてもよい．）