離散数理工学 (1) **2021 年 10 月 12 日**

演習問題 **岡本 吉央**

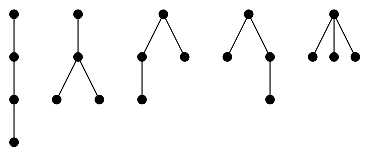
提出締切： 2021 年 10 月 19 日 午前 9:00

授業内問題 1.1 任意の自然数 n, k を考える．$n \geq k$ ならば，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq (1+n)^k.$$

(ヒント：$\binom{n}{i} \leq n^i$ が正しいことをまず確認してみよ．)

授業内問題 1.2 自然数 $n \geq 1$ に対して，頂点数 $n+1$ の順序付きラベルなし根付き木を考える．例えば，$n = 3$ のとき，それらをすべて挙げると次のようになる．



以下の問いに答えよ．

1. 頂点数 5 の順序付きラベルなし根付き木をすべて挙げ，その総数が何であるか，答えよ．
2. 頂点数 $n+1$ の順序付きラベルなし根付き木の総数が第 n カタラン数と等しいことを，全単射による証明によって示せ．入れ子状の括弧列，順序付きラベルなし全二分木，ディック道のどれを用いてもよい．(ヒント：頂点数 $n+1$ の順序付きラベルなし根付き木の辺の数が n であることに着目せよ．)

復習問題 1.3 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$n! \leq \mathrm{e}\, n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 1.4 任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ であるとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b}$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：b に関する帰納法を用いてみよ．)

復習問題 1.5 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

復習問題 1.6 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．

復習問題 1.7 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

復習問題 1.8 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，次の数がそれぞれ等しいことを，全単射を用いて証明せよ．

1. 長さ $2n$ の入れ子状になった括弧列の総数．
2. 葉の数が $n+1$ である順序付きラベルなし全二分木の総数．
3. $(0, 0)$ から (n, n) に至るディック道の総数．

補足問題 1.9 任意の実数 x に対して，$1 + x \leq \mathrm{e}^x$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.10 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$\mathrm{e} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leq n!$$

が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.11 自然数 a と b が $a \geq 1$，$b \geq 1$，$a \geq b$ を満たすとする．

1. 不等式 $\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ が成り立つことを証明せよ．
2. 不等式 $\frac{a^b}{b!} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\, a}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ．
3. 上の 2 つの小問より，$\binom{a}{b} \leq \left(\frac{\mathrm{e}\, a}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 1.12 [二項定理] 任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 1.13 次を証明せよ．演習問題 1.9 を用いてよい．

1. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$(1+\frac{1}{n})^n \leq \mathrm{e}$.
2. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$(1+\frac{1}{n})^{n+1} \geq \mathrm{e}$.（ヒント：$1+\frac{1}{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$ と変形してみよ．）
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.（ヒント：上の 2 つの小問を用いよ．）

追加問題 1.14 問題 1.6 にある等式は係数が -1 である項を移項させると，

$$\sum_{\substack{k=0\\k:\text{偶数}}}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0\\k:\text{奇数}}}^{n}\binom{n}{k}$$

となる．この等式の両辺に対して組合せ的解釈を与え，等式自体を全単射による証明で導いてみよ．

追加問題 1.15 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

が成り立つことを証明せよ．二項定理を用いてもよい．また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

追加問題 1.16 任意の自然数 $a, b, c \geq 0$ に対して，$a \geq c$, $b \geq c$ であるとき，

$$\sum_{k=0}^{c}\binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$$

が成り立つことを証明せよ．(今まで出てきた等式を用いてもよい．) また，この等式の組合せ的解釈を与えよ．

追加問題 1.17 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，次を満たす自然数列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を考える．

- $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$.
- 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$a_i \leq i$.

例えば，$n = 3$ のとき，この性質を満たす数列をすべて挙げると，以下の 5 つとなる．

$$(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,2), (1,2,3).$$

以下の問いに答えよ．

1. $n = 4$ のとき，この性質を満たす数列をすべて挙げ，その総数が何であるか，答えよ．
2. この性質を満たす数列の総数が第 n カタラン数と等しいことを，全単射による証明によって示せ．入れ子状の括弧列，順序付きラベルなし全二分木，ディック道のどれを用いてもよい．

追加問題 (発展) 1.18 この問いの目標は，任意の $n \geq 1$ に対して，

$$C_n + \binom{2n}{2n+1} = \binom{2n}{n}$$

が成り立つことを，組合せ的解釈を通して証明することである．ただし，C_n は第 n カタラン数である．これを示すことができれば，

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

となることが導かれる．

格子道を用いた二項係数の組合せ的解釈を用いると，右辺の $\binom{2n}{n}$ は $(0,0)$ から (n,n) に至る格子道の総数となる．一方，左辺の C_n は $(0,0)$ から (n,n) に至るディック道の総数となる．すなわち，証明すべきことは，$(0,0)$ から (n,n) に至る格子道の中で，ディック道ではないものの総数が $\binom{2n}{n+1}$ となることである．一方で，$\binom{2n}{n+1}$ は $(0,0)$ から $(n+1, n-1)$ に至る格子道の総数である．

「$(0,0)$ から $(n+1, n-1)$ に至る格子道全体の集合」と「$(0,0)$ から (n,n) に至る格子道でディック道ではないもの全体の集合」の間に全単射を構成し，この 2 つの総数が等しいことを証明せよ．

（ヒント：$(0,0)$ から (n,n) に至る格子道でディック道でないものを考えると，その道は対角線 $y = x$ の下側の一部を通る．はじめてその部分に入った点を (i,j) としたとき，(i,j) 以降は上に進むことと右に進むことを入れ替えて進み，新たな道を構成する．このようにして構成した道は $(0,0)$ から $(n+1, n-1)$ に至る格子道となる．次の図を参照せよ．青い点が上に記した (i,j) を表す．）