

## 1 レポート課題

次の 2 問にすべて答えよ。

### 問 1

図 1 のグラフ  $G$  において、辺の上にならべて書かれている数字は、その辺の費用を表すものとする。一方で、 $\circ$  の中に書かれている数字は、対応する頂点の番号 (ラベル) である。

図 1 のグラフと辺費用を入力とする最小費用完全マッチング問題を考えるとき、その最適解となる (出力となる) 完全マッチングを 1 つ示せ。そして、線形計画法の相補性定理 (または、強双対定理) を用いることで、その完全マッチングが最適解であることを証明せよ。

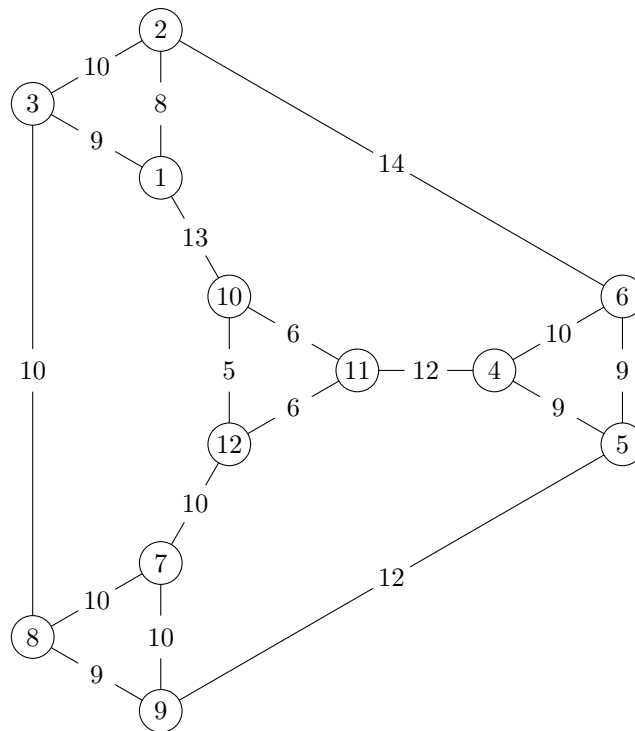


図 1: 問 1 に現れるグラフ  $G$ .

### 問 2

「二部グラフの最小費用完全マッチング問題」では、入力として、完全マッチングを持つ二部グラフ  $G = (A, B, E)$  と非負の辺費用  $c: E \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられる。

二部グラフの最小費用完全マッチング問題に対して、講義で紹介したハンガリー法とは異なる、次のようなアルゴリズムを考える。このアルゴリズムでは、入力した二部グラフ  $G = (A, B, E)$  (ただし、 $|A| = |B|$ ) の完全マッチング  $M \subseteq E$  を常に保持する。適当な完全マッチング  $M$  を見つけて、それをアルゴリズムにおける初期解とする。(初期化の方法は、アルゴリズムの正当性に影響しない。)

アルゴリズムでは、完全マッチング  $M$  に対して、次の操作を行う。

**Step 1.** 次のように定義される有向グラフ  $\vec{D}_M = (V, \vec{E}_M)$  を定義する.

$$V := A \cup B,$$

$$\vec{E}_M := \{(a, b) \in A \times B \mid \{a, b\} \in E\} \cup \{(b, a) \in B \times A \mid \{a, b\} \in M\}.$$

ここで,  $(u, v)$  は,  $u$  を始点,  $v$  を終点とする有向辺 (弧) を表す. また,  $\vec{D}_M$  の各有向辺  $(u, v)$  に対して, 次で定義する長さ  $\ell(u, v)$  を考える.

- $(a, b) \in \vec{E}_M$ ,  $a \in A, b \in B$  のとき,  $\ell(a, b) := c_{a,b}$ .
- $(b, a) \in \vec{E}_M$ ,  $a \in A, b \in B$  のとき,  $\ell(b, a) := -c_{a,b}$ .

**Step 2.** 有向グラフ  $\vec{D}_M$  の中に長さが負である有向閉路が存在するか, 判定する. ただし, 有向閉路の長さとは, その閉路に現れる有向辺の長さの総和として定義される.

**Step 2-1.** 有向グラフ  $\vec{D}_M$  の中に長さが負である有向閉路が存在しないとき,  $M$  を最小費用完全マッチングとして出力する.

**Step 2-2.** 有向グラフ  $\vec{D}_M$  の中に長さが負である有向閉路が存在するとき, そのような有向閉路に現れる有向辺の集合を  $\vec{C}$  とする. このとき,

$$C := \{\{u, v\} \in E \mid (u, v) \in \vec{C}\}$$

とする. つまり,  $C$  は  $G$  における閉路 (の辺集合) であり,  $C$  には  $M$  の要素である辺と  $M$  の要素ではない辺が交互に現れる. ここで,  $C$  における  $M$  の要素である辺と  $M$  の要素でない辺を交換して, 新たな  $M$  とする. つまり,  $M := M \triangle C$  とする. そして, Step 1 に戻る.

以下の流れに沿って, 上のアルゴリズムの正当性を証明せよ. (注意: このアルゴリズムは必ず停止することが証明できる. また, 「長さが負である閉路」をうまく選ぶことで, 多項式時間アルゴリズムになることも証明できる. しかし, これらはこの問題の主眼ではない. )

(問 2-1). 有向グラフ  $\vec{D}_M$  の中に長さが負の有向閉路が存在するとき,  $M$  は最小費用完全マッチングではないことを証明せよ. (ヒント: Step 2-2 の操作に注目せよ. )

(問 2-2). 有向グラフ  $\vec{D}_M$  の中に長さが負の有向閉路が存在しないときを考える. このとき,  $\vec{D}_M$  から, 次で定義される有向グラフ  $\vec{D}'_M = (V', \vec{E}'_M)$  を考える.

$$V' = V \cup \{s\},$$

$$\vec{E}'_M = \vec{E}_M \cup \{(s, a) \mid a \in A\}.$$

そして,  $\vec{D}'_M$  の各有向辺  $e$  に次で定義される長さ  $\ell'(e)$  を定義する.

$$\ell'(e) = \begin{cases} \ell(e) & e \in \vec{E}_M \text{ のとき,} \\ 0 & e \notin \vec{E}_M \text{ のとき.} \end{cases}$$

また, 各頂点  $v \in V$  に対して,  $s$  から  $v$  に至る最短経路長 (ただし, 長さは  $\ell'$  を用いて測る) を  $p_v$  とする. この  $p_v$  が次の性質を満たすことを証明せよ.

$$(u, v) \in \vec{E}_M \text{ のとき, } p_u + \ell(u, v) \geq p_v.$$

(注意: 「 $\vec{D}_M$  の中に長さが負である有向閉路がない」という仮定は,  $s$  から  $v$  に至る最短経路長が定まるために必要な条件である. 最短経路長が確かに定まることは事実として用いて良い. また, 最短経路長  $p_v$  は負になることがありうる. )

(問 2-3). この小問では前小問 2-2 の設定をそのまま踏襲する. 値  $p_v$  を用いることで, 次の線形計画問題 (DLP) に対する許容解  $y$  を構成し,  $y$  が許容解であることも証明せよ.

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{a \in A} y_a + \sum_{b \in B} y_b \\ & \text{subject to} && y_a + y_b \leq c_{a,b} \quad (\forall \{a, b\} \in E). \end{aligned}$$

線形計画法の相補性定理を用いて, 完全マッチング  $M$  が最小費用完全マッチングであり, 構成した許容解  $y$  が (DLP) の最適解であることを証明せよ.

## 2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 2 月 16 日 (火) 23:59 JST.
- 提出法は Google Classroom にて, 課題「レポート 2 提出」より PDF ファイル をアップロードする. レポートの冒頭に, 学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は, (1) 記述の正確さと厳密さ, (2) 日本語表現の適切さ, (3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である. 期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない. 50 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は, 証明や説明が過不足なく記述されているか, そして, それが数学的・論理的に正しいか, ということの意味する. 「(2) 日本語表現の適切さ」は, 証明や説明の記述における言語が注意深く用いられているか, ということの意味する. 「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は, 証明や説明が分かりやすい構造を成しているか, ということの意味し, これには文書作成ソフトウェア, 図表作成ソフトウェアの適切な使用方法も含まれる.
- 不正行為については, 学修要覧を参照すること. 一方で, 他の履修登録生 (受講生) と相談したり, 文献を調べることは大いに推奨する. その際は, レポート内で (例えば, 末尾や冒頭で), 相談者や参考文献を必ず記載し, どの部分の相談を行ったのか, あるいは, どの部分で参考にしたのか, 本文中に記述すること. その記述が無い場合は, 不正行為が疑われる可能性がある.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合, 教員が学生に問い合わせを行うことがありうる. その場合, 学生は (Zoom ミーティングなどを通して, 口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある. その一方で, そのような問い合わせがない場合に, レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.

以上