

1 レポート課題

次の3問にすべて答えよ。

問 1

図1のグラフ G において、次の条件をすべて満たすマッチング M_1 と M_2 を与えよ。そして、その条件を満たす理由も説明せよ。

(条件1) M_1 は G の極大マッチングである。

(条件2) M_2 は G の完全マッチングである。

(条件3) $M_1 \triangle M_2$ を辺集合とする G の部分グラフの連結成分の数は2である、そして、その中の1つは閉路であり、もう1つは M_1 に関する増加道である。

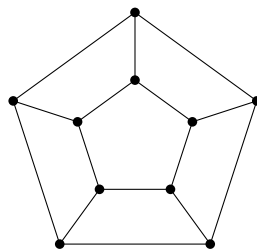


図 1: 問 1 に現れるグラフ G .

問 2

図2のグラフ H において、最大マッチングを1つ与えよ。そして、そのマッチングが最大マッチングであることを、Berge-Tutte の公式を用いて証明せよ。

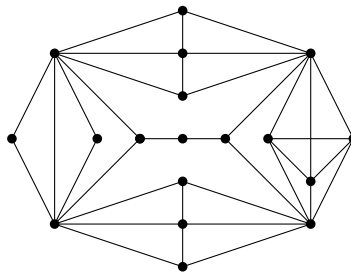


図 2: 問 2 に現れるグラフ H .

問 3

次の流れに沿って、Tutte の定理を用いて Hall の結婚定理における十分性を証明せよ。(以下の証明の中で、Hall の結婚定理、König–Ore の公式、König–Egerváry の定理を用いてはならない。)

[Hall の結婚定理] 任意の二部グラフ $G = (A, B, E)$ を考える。グラフ G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つための必要十分条件は、任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して、 $|S| \leq |N_G(S)|$ が成り立つことである。

[Tutte 条件] 無向グラフ $G = (V, E)$ が Tutte 条件を満たすとは、任意の頂点部分集合 $U \subseteq V$ に対して、 $|U| \geq o(G - U)$ が成り立つことである。ここで、 $o(G - U)$ は $G - U$ の奇成分の総数を表す。

(問 3-1). 任意の二部グラフ $G = (A, B, E)$ を考える。グラフ G から、次のグラフ $H = (V, F)$ を作る。

$$B' = \begin{cases} B & (|A \cup B| \text{ が偶数のとき}), \\ B \cup \{c\} & (|A \cup B| \text{ が奇数のとき (ただし, } c \notin B)), \end{cases}$$
$$V = A \cup B',$$
$$F = E \cup \{\{b_1, b_2\} \mid b_1, b_2 \in B', b_1 \neq b_2\}.$$

グラフ G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つとき、グラフ H が完全マッチングを持つことを証明せよ。

(問 3-2). グラフ H が完全マッチングを持つとき、グラフ G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つことを証明せよ。

(問 3-3). 任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して、 $|S| \leq |N_G(S)|$ が成り立つとき、 H は Tutte 条件を満たすことを証明せよ。

(問 3-4). 上の 3 つの小問で証明した事実を用いて、Tutte の定理から Hall の結婚定理における十分性を導出せよ。

2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 1 月 4 日 (月) 23:59 JST.
- 提出法は Google Classroom にて、課題「レポート提出 1」より PDF ファイル をアップロードする。レポートの冒頭に、学籍番号と氏名を必ず記載すること。
- 採点基準は、(1) 記述の正確さと厳密さ、(2) 日本語表現の適切さ、(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である。期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない。50 点満点。
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は、証明や説明が過不足なく記述されているか、そして、それが数学的・論理的に正しいか、ということの意味する。「(2) 日本語表現の適切さ」は、証明や説明の記述における言語が注意深く用いられているか、ということの意味する。「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は、証明や説明が分かりやすい構造を成しているか、ということの意味し、これには文書作成ソフトウェア、図表作成ソフトウェアの適切な使用方法も含まれる。
- 不正行為については、学修要覧を参照すること。一方で、他の履修登録生 (受講生) と相談したり、文献を調べることは大いに推奨する。その際は、レポート内で (例えば、末尾や冒頭で)、相談者や参考文献を必ず記載し、どの部分の相談を行ったのか、あるいは、どの部分で参考にしたのか、本文中に記述すること。その記述が無い場合は、不正行為が疑われる可能性がある。
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合、教員が学生に問い合わせを行うことがありうる。その場合、学生は (Zoom ミーティングなどを通して、口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある。その一方で、そのような問い合わせがない場合に、レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない。

以上