離散最適化基礎論　第 12 回
一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 1 月 19 日

最終更新：2021 年 1 月 25 日　09:02

スケジュール 前半

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)

⋆ 祝日 のため 休み (11/3)

5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/24)

7. 整数計画法の復習 (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

8 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
★ 国際会議 のため 休み (12/15)
9 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

この講義が対象とする 4 つの問題

二部グラフの 最大マッチング問題	→	二部グラフの 最小費用完全マッチング問題
↓		↓
一般グラフの 最大マッチング問題	→	一般グラフの 最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

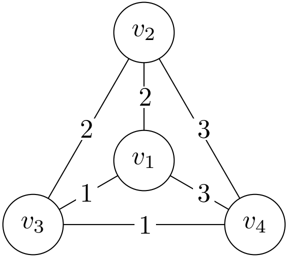
「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 $\rightsquigarrow$
  費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

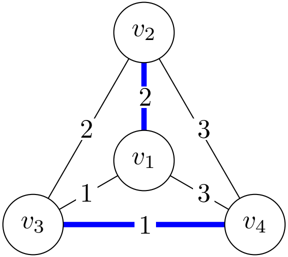
定義：最小費用完全マッチング問題
(minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



定義：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G=(V,E)$，非負辺費用関数 $c\colon E\to\mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



今日の目標

- 一般グラフの最小費用完全マッチング問題を解くためのアルゴリズムを記述する

最小費用完全マッチング問題は次の整数計画問題として定式化できる

(IP)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 && (\forall\ v \in V), \\
& x_e \in \{0, 1\} && (\forall\ e \in E)
\end{aligned}
$$

ここで，$\delta(v)$ は頂点 v に接続する辺全体の集合

線形計画緩和 (LP)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
& x_e \geq 0 & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

第 10 回講義で 観察したこと

$G = (V, E)$ が二部グラフでないとき，
(LP) の最適解が (IP) の許容解とならない場合がある

この観察から，二部グラフのときの同じ「簡単」なアルゴリズムでは
一般グラフの最小費用完全マッチング問題を解けないと分かる

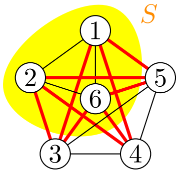
緩和を強化するため，次の制約を追加する

定義：奇カット不等式 (odd cut inequality)

任意の頂点部分集合 $S \subseteq V$ (ただし，$|S| \geq 3$ で，$|S|$ は奇数) に対して

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1$$

ここで，$\delta(S)$ は一端点を S に，もう一端点を $V \setminus S$ に持つ辺全体の集合



$S = \{1, 2, 6\}$ のとき，

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{36} + x_{46} + x_{56} \geq 1$$

以後，$\mathcal{C} = \{S \subseteq V \mid |S| \geq 3, |V-S| \geq 3, |S|$ が奇数 $\}$ とする

(IP')：奇カット不等式を追加した整数計画問題

$$
\begin{array}{llr}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & (\forall\ S \in \mathcal{C}), \\
& x_e \in \{0, 1\} & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

性質 (第 10 回講義で証明)

(IP) の許容領域 $=$ (IP') の許容領域

(LP')：(IP') の線形計画緩和

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
 & \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & (\forall\ S \in \mathcal{C}), \\
 & x_e \geq 0 & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

定理 (第 11 回講義で証明) (Edmonds '65)

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，
(LP') の最適解で，(IP) の許容解となるものが存在する

- この定理から，
  一般グラフの最小費用完全マッチング問題に対しても，
  主双対法が作れる (ような気がしてくる) ← 今日の内容

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{(IP) の最適値}} & \geq & \boxed{\text{(LP) の最適値}} \\
\| & & \wedge\!\mid \\
\boxed{\text{(IP') の最適値}} & = & \boxed{\text{(LP') の最適値}}
\end{array}
$$

主双対法のアルゴリズムを設計するためには,
(LP') の双対問題を考える必要がある

(DLP') : (LP') の双対問題

変数は，各 $v \in V$ に対する y_v と
各 $S \in \mathcal{C}$ に対する z_S

$$
\begin{array}{llr}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{v \in V} y_v + \sum_{S \in \mathcal{C}} z_S & \\
\text{subject to} & \displaystyle y_u + y_v + \sum_{\substack{S \in \mathcal{C}, \\ e \in \delta(S)}} z_S \leq c_e & (\forall\ e = \{u, v\} \in E), \\
& z_S \geq 0 & (\forall\ S \in \mathcal{C})
\end{array}
$$

相補性定理を (LP') と (DLP') に対して書き直すと次のようになる

相補性定理

x が (LP') の最適解，かつ，y, z が (DLP') の最適解 $\Leftrightarrow$

1. x が (LP') の許容解
2. y, z が (DLP') の許容解
3. $$\sum_{\{u,v\} \in E} x_{\{u,v\}} \left(c_{\{u,v\}} - y_u - y_v - \sum_{\substack{S \in \mathcal{C}, \\ \{u,v\} \in \delta(S)}} z_S \right) = 0 \qquad \text{(主相補性)}$$
4. $$\sum_{S \in \mathcal{C}} z_S \left(\sum_{e \in \delta(S)} x_e - 1 \right) = 0 \qquad \text{(双対相補性)}$$

$\boxed{\text{不変条件}}$：アルゴリズムの実行中，x, y, z は次の条件を満たし続ける

- $x \in \{0, 1\}^E$
- y, z は (DLP') の許容解である
- x と y, z は相補性条件を満たす

$\boxed{\text{停止条件}}$：次の条件を満たしたら，アルゴリズムは停止する

- x は (LP') の許容解である

相補性定理の帰結

アルゴリズムが停止したとき，
x は (LP') の最適解で，y, z は (DLP') の最適解である

さらに，$x \in \{0, 1\}^E$ なので，$\underline{x \text{ は (IP) の最適解である}}$

(LP') の許容解 $x \in \mathbb{R}^E$，(DLP') の許容解 $y \in \mathbb{R}^V, z \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$

主相補性

$$\sum_{\{u,v\} \in E} x_{\{u,v\}} \left(c_{\{u,v\}} - y_u - y_v - \sum_{\substack{S \in \mathcal{C}, \\ \{u,v\} \in \delta(S)}} z_S \right) = 0$$

x は (LP') の許容解，y, z は (DLP') の許容解なので，
主相補性は次のように書き換えられる

主相補性 (書き換え)

すべての $\{u,v\} \in E$ に対して

$$x_{\{u,v\}} > 0 \quad \text{ならば} \quad y_u + y_v + \sum_{\substack{S \in \mathcal{C}, \\ \{u,v\} \in \delta(S)}} z_S = c_{\{u,v\}}$$

(LP') の許容解 $x \in \mathbb{R}^E$，(DLP') の許容解 $y \in \mathbb{R}^V, z \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$

双対相補性

$$\sum_{S \in \mathcal{C}} z_S \left(\sum_{e \in \delta(S)} x_e - 1 \right) = 0$$

x は (LP') の許容解，y, z は (DLP') の許容解なので，
双対相補性は次のように書き換えられる

双対相補性 (書き換え)

すべての $S \in \mathcal{C}$ に対して

$$z_S > 0 \quad \text{ならば} \quad \sum_{e \in \delta(S)} x_e = 1$$

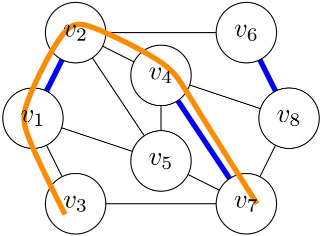
目次

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：交互道 (alternating path)

M に関する交互道とは，G における道で，
M の辺と $E - M$ の辺が交互に現れるもの

交互道を交互路と呼ぶこともある



これ は 青のマッチング に関する交互道である

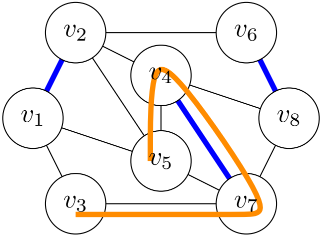
増加道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：増加道 (augmenting path)

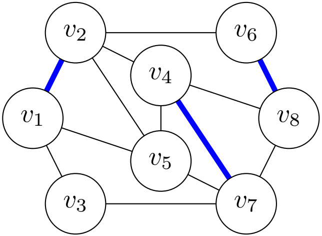
M に関する増加道とは，M に関する交互道で，
その両端点が M の辺と接続しないもの

増加道を増大道，増加路，増大路と呼ぶこともある



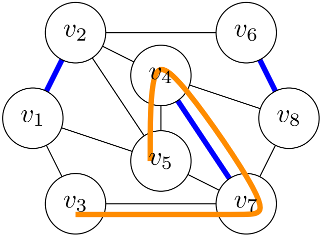
これ は 青のマッチング に関する増加道である

増加道に沿ってマッチングを大きくする



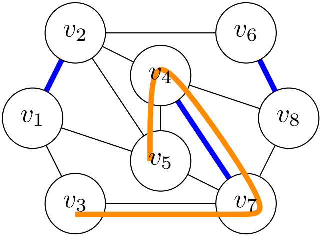
辺数 3 の
マッチング

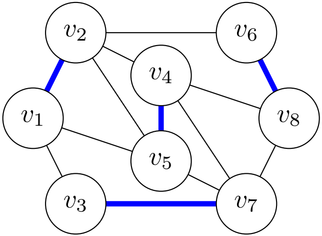
増加道に沿ってマッチングを大きくする



辺数 3 の
マッチング

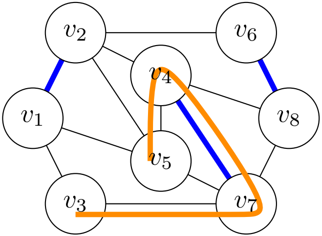
増加道

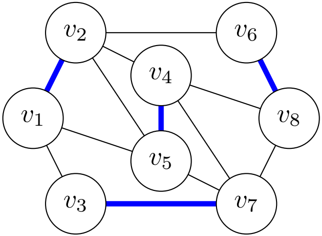




辺数 3 の マッチング $\rightsquigarrow$ 増加道に沿って 大きくする $\rightsquigarrow$ 辺数 4 の マッチング

増加道に沿ってマッチングを大きくする

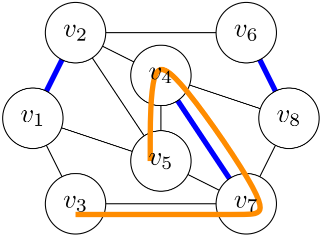


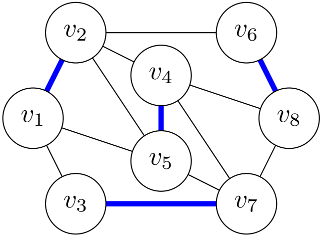


辺数 3 の マッチング $\rightsquigarrow$ 増加道に沿って 大きくする $\rightsquigarrow$ 辺数 4 の マッチング

つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない





辺数 3 の マッチング $\rightsquigarrow$ 増加道に沿って大きくする $\rightsquigarrow$ 辺数 4 の マッチング

つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

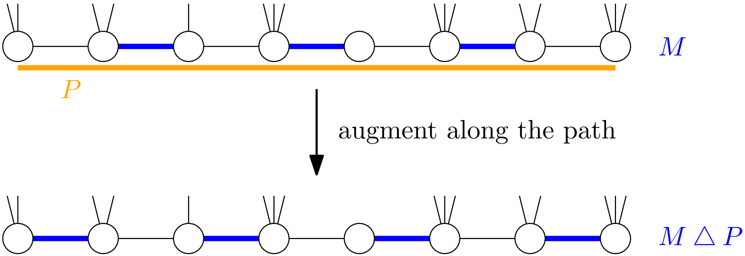
つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定理：最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M に関する増加道が存在しない

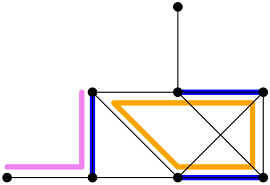


無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$

定義：花 (blossom)

M に関する花とは，長さ $2k+1$ の G の閉路 C で，次を満たすもの

- M と k 個の辺を共有する
- C の中で M に飽和されていない頂点と，M に飽和されない頂点を結ぶ偶数長の交互道 (ただし，C の辺を使わない) が存在する



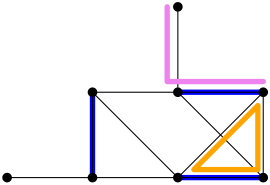
これは花である

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$

定義：花 (blossom)

M に関する花とは，長さ $2k+1$ の G の閉路 C で，次を満たすもの

- M と k 個の辺を共有する
- C の中で M に飽和されていない頂点と，M に飽和されない頂点を結ぶ偶数長の交互道 (ただし，C の辺を使わない) が存在する



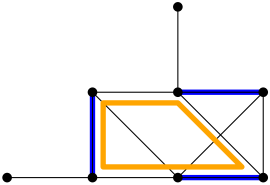
これは花である

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$

定義：花 (blossom)

M に関する花とは，長さ $2k+1$ の G の閉路 C で，次を満たすもの

- M と k 個の辺を共有する
- C の中で M に飽和されていない頂点と，M に飽和されない頂点を結ぶ偶数長の交互道 (ただし，C の辺を使わない) が存在する



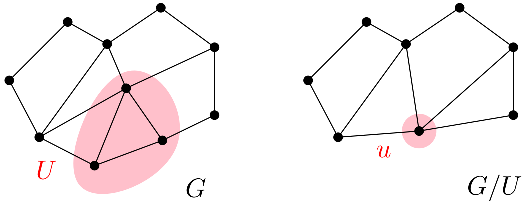
これは花ではない

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $U \subseteq V$

定義：縮約 (contraction)

G における U の縮約とは，次のグラフ G/U

- G/U の頂点集合 $= V - U \cup \{u\}$ (ただし，$u \notin V$)
- G/U の辺集合 $= (E - \{e \in E \mid U \cap e \neq \emptyset\}) \cup$
  $\{\{v, u\} \mid$ ある $x \in U$ に対して $\{v, x\} \in E\}$

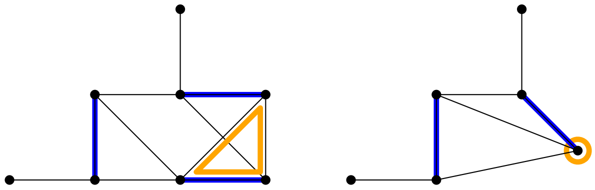


「頂点集合 U を頂点 u に縮約する」ということもある

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング M，M に関する花 C

定義：花の縮約

C の縮約 G/C に伴い，M も縮約する (その結果を M/C と書く)

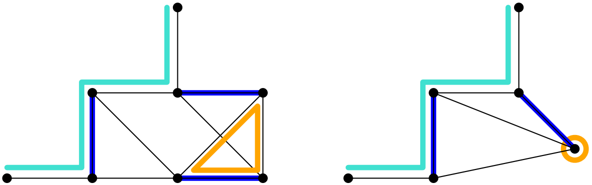


注：M/C は G/C のマッチング

無向グラフ $G=(V,E)$，G のマッチング M，M に関する花 C

性質：花の縮約と最大マッチング (第 5 回講義で証明)

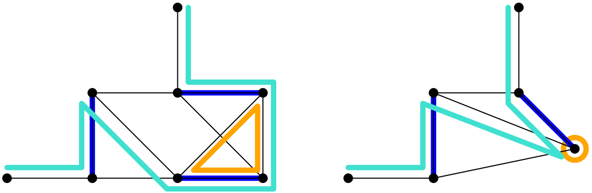
M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M/C が G/C の最大マッチング



無向グラフ $G=(V,E)$，G のマッチング M，M に関する花 C

性質：花の縮約と最大マッチング (第 5 回講義で証明)

M が G の最大マッチング ⇔ M/C が G/C の最大マッチング



無向グラフ $G = (V, E)$

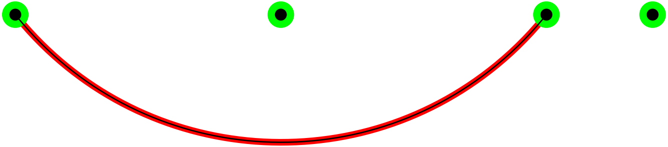
基本的な考え方

G のマッチング M を常に保持する

- M に関する花 C か増加道 P を見つけようとする
- 花 C が見つかったとき
  - $G := G/C$，$M := M/C$ として，繰り返す
- 増加道 P が見つかったとき
  - 縮約を解除して，もとのグラフの増加道 P' を見つける
  - $M := M \triangle P'$ とする
- 花も増加道も見つからないとき
  - M が G の最大マッチングであるはず
  - Berge–Tutte の公式を用いて，最適性を保証する

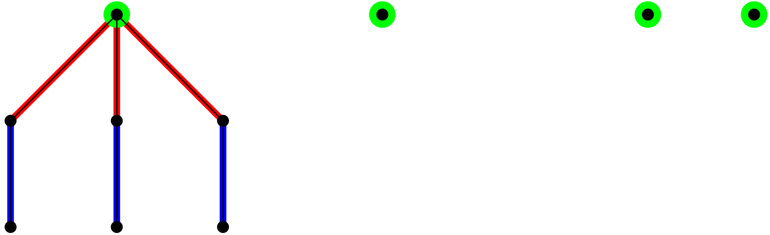
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

緑の頂点はマッチングに飽和されない頂点

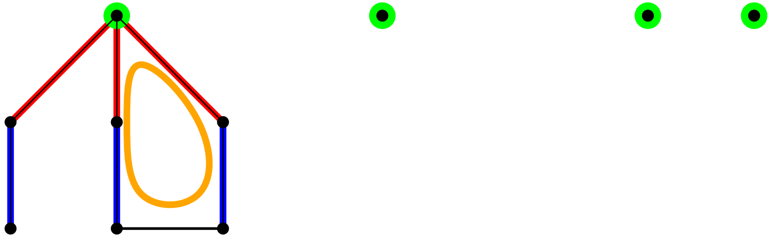


飽和されない頂点どうしを結ぶ辺があれば，それは増加道

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

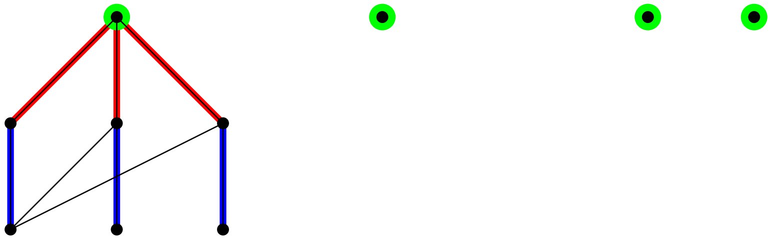


一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

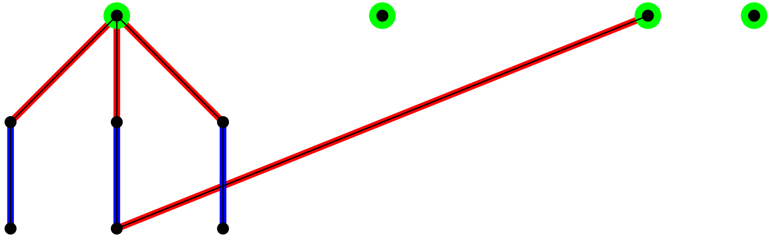


青い辺でたどり着いた頂点どうしを結ぶ辺があれば，花が見つかる

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

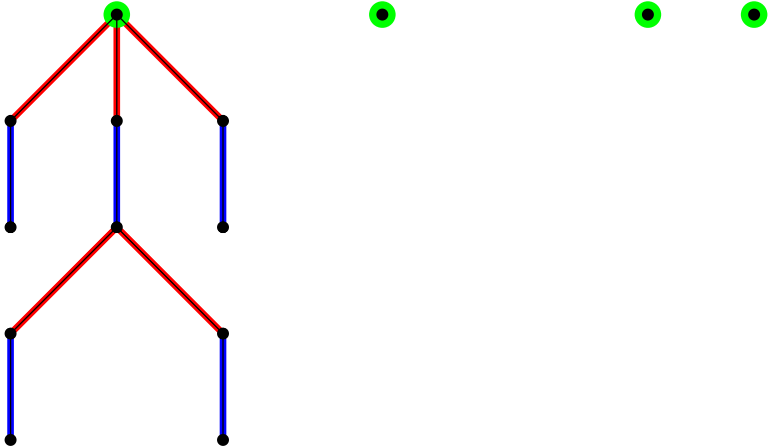


一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

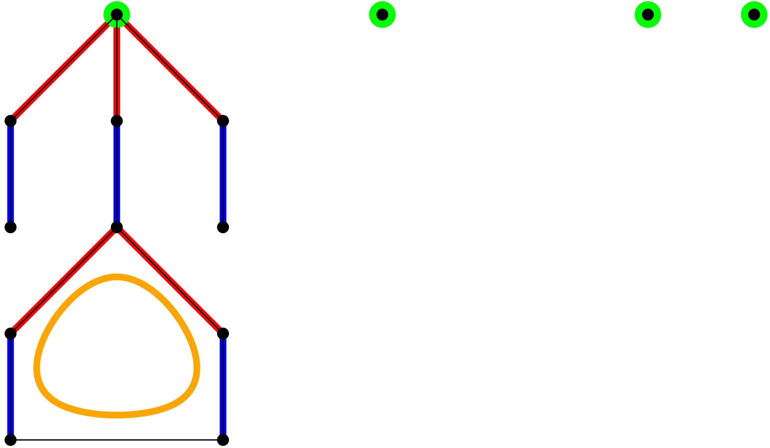


青い辺でたどり着いた頂点と緑の頂点を結ぶ辺があれば，
増加道が見つかる

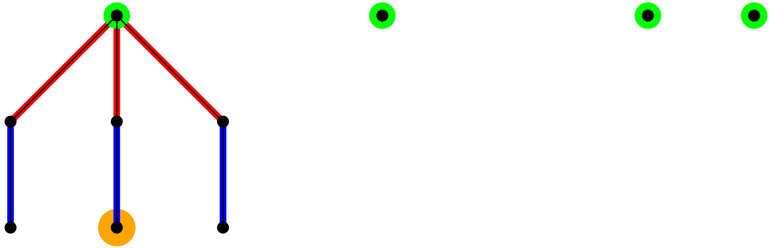
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ



一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

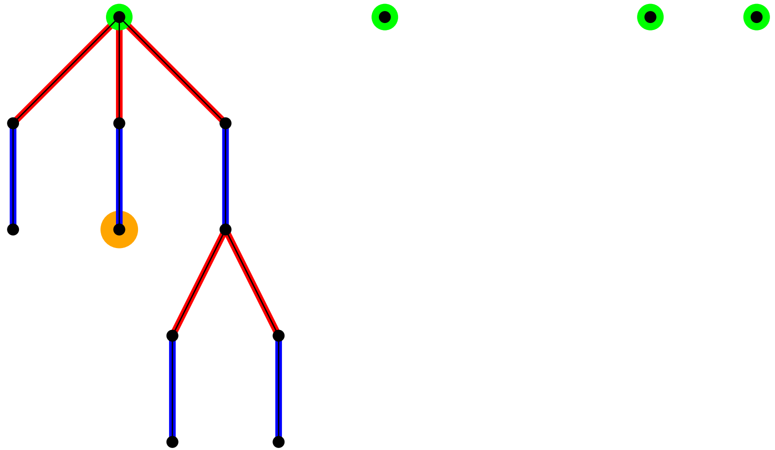


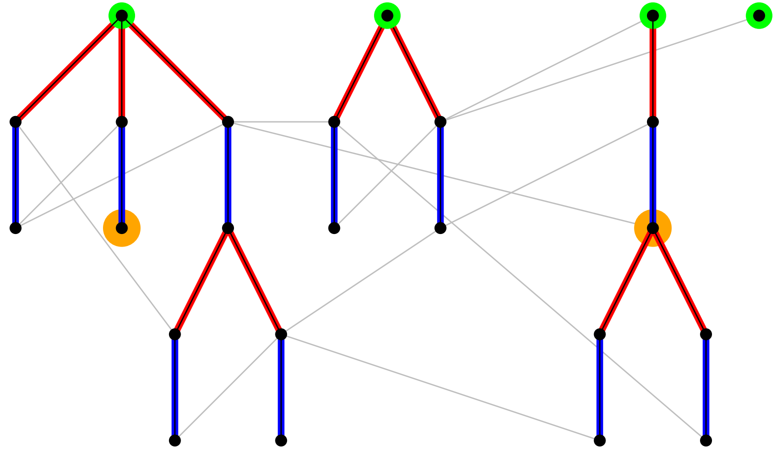
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ



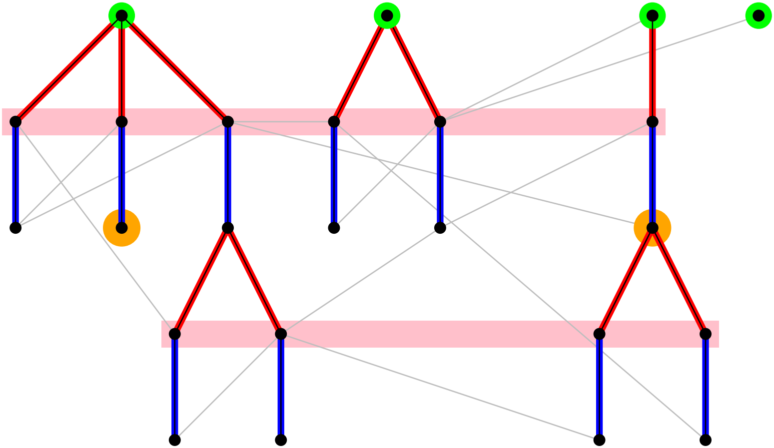
縮約でできた頂点は青い辺でたどり着いた頂点となる

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ





全体像



ピンクの頂点数 ＝ 青の辺数

$$\underbrace{|M|}_{\text{青の辺数}} = \frac{1}{2}(\underbrace{|V| - o(G-U)}_{\text{ピンクの頂点数}} + \underbrace{|U|}_{\text{ピンクの頂点数}})$$

入力：無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$
(例えば，$M := \emptyset$ とする)

1. $S := M$ が飽和しない G の頂点全体の集合
2. S から G の頂点を幅優先探索する
   - 探索時に，M が飽和する頂点を新たに訪問したら，その頂点はキューに挿入せず，M の辺をたどって到達する頂点を挿入する
3. 増加道 P が見つかったら，縮約を解除し，$M := M \triangle P$ として最初に戻る
4. 花 C が見つかったら，$G := G/C$，$M := M/C$ として最初に戻る
5. 増加道も花も見つからなかったら，縮約を解除し，M を出力して終了

定理 (Edmonds '65)

一般グラフの最大マッチングは多項式時間で発見できる

目次

$\boxed{\text{不変条件}}$：アルゴリズムの実行中，x, y, z は次の条件を満たし続ける

- $x \in \{0,1\}^E$
- y, z は (DLP') の許容解である
- x と y, z は相補性条件を満たす

$\boxed{\text{停止条件}}$：次の条件を満たしたら，アルゴリズムは停止する

- x は (LP') の許容解である

相補性定理の帰結

アルゴリズムが停止したとき，
x は (LP') の最適解で，y, z は (DLP') の最適解である

さらに，$x \in \{0,1\}^E$ なので，x は (IP) の最適解である

アルゴリズムのアイディア：主双対法 — 何が難しいか？

我々の目標

一般グラフの最小費用完全マッチング問題を 多項式時間で解くこと

- そのために，主双対法を使いたい
- つまり，(IP) と (DLP') を同時に解きたい
- (DLP') の許容解は $y \in \mathbb{R}^V$ と $z \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ で表される

問題点

$|\mathcal{C}|$ はグラフのサイズ $(|V| + |E|)$ に対して，指数関数的に大きい

$\therefore z$ を表現するだけで，多項式時間よりも大きな時間がかかる

問題点

$|\mathcal{C}|$ はグラフのサイズ $(|V|+|E|)$ に対して，指数関数的に大きい

$\therefore z$ を表現するだけで，多項式時間よりも大きな時間がかかる

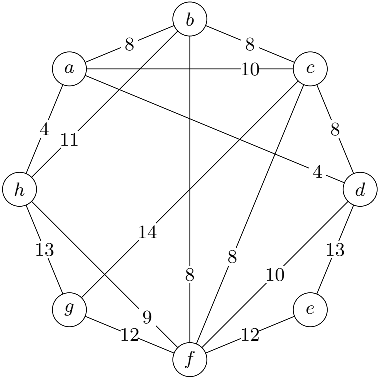
問題点の克服法

z を格納するときに，

- $z_S = 0$ となる $S \in \mathcal{C}$ は無視して，
- $z_S > 0$ となる $S \in \mathcal{C}$ だけ格納する

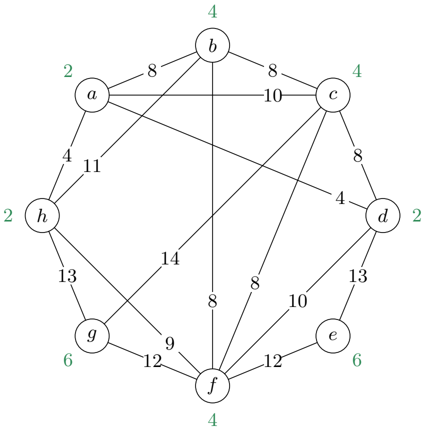
いまから説明するアルゴリズムでは，

- このようにしてもちゃんと解けることを説明する
- アルゴリズムの動作中，$z_S > 0$ となる $S \in \mathcal{C}$ の数が
グラフのサイズの多項式にしかならないことも保証できる



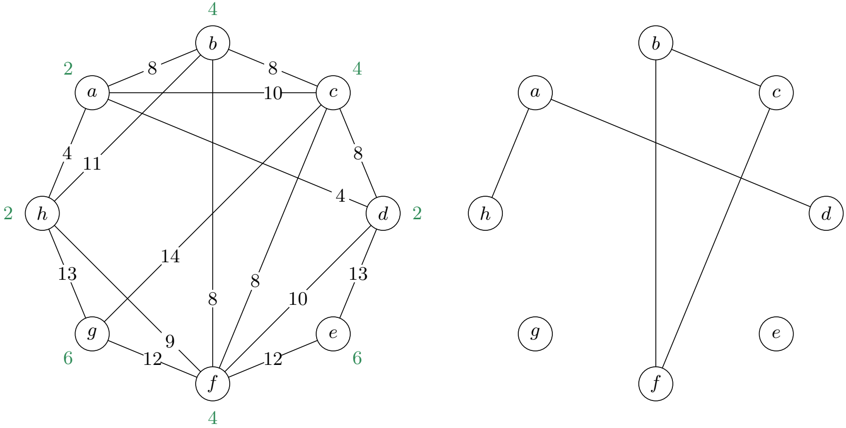
各辺に費用がついている

主双対法：例 (1)



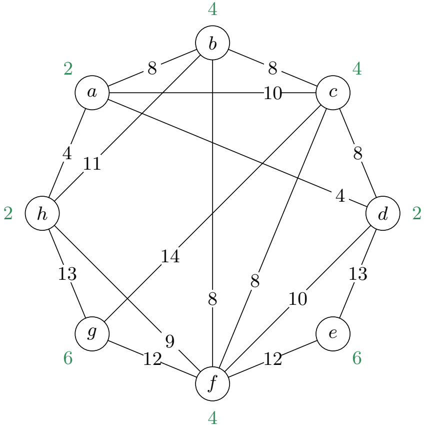
適当に双対変数 y の値を定める ($z = 0$ とする)

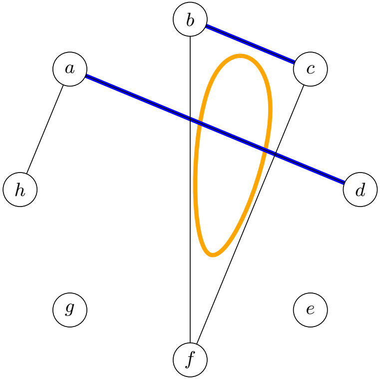
主双対法：例 (1)



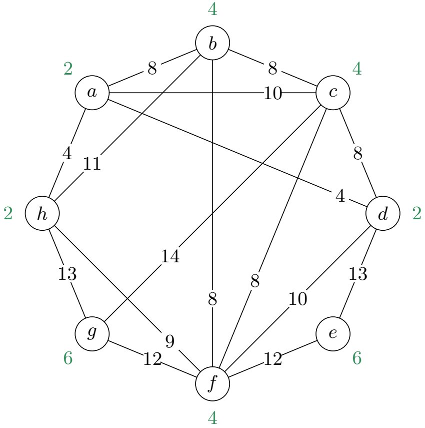
$y_u + y_v = c_{u,v}$ となる辺 $\{u, v\}$ 全体から成るグラフ H を作る

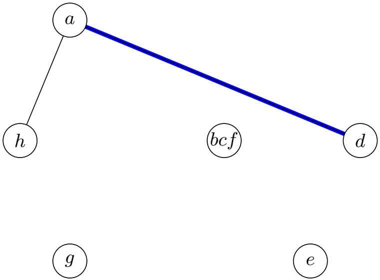
主双対法：例 (1)



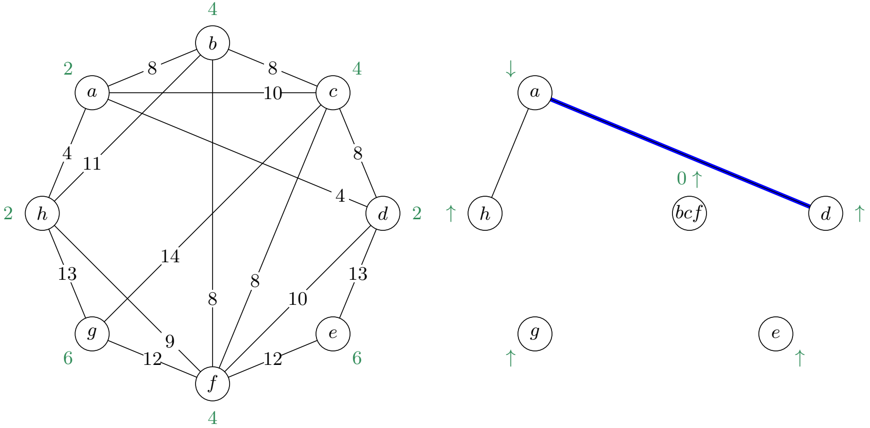


H の最大マッチング M を見つける



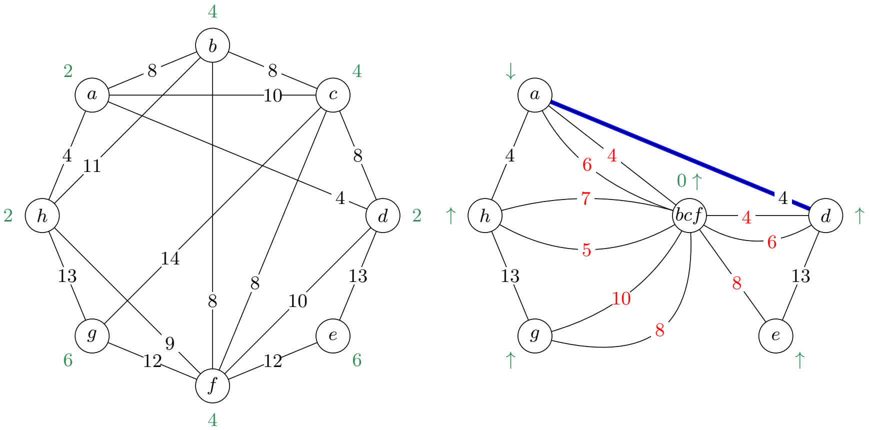


M に関する花 C がある $\Rightarrow$ C を縮約する



双対変数の更新を行う

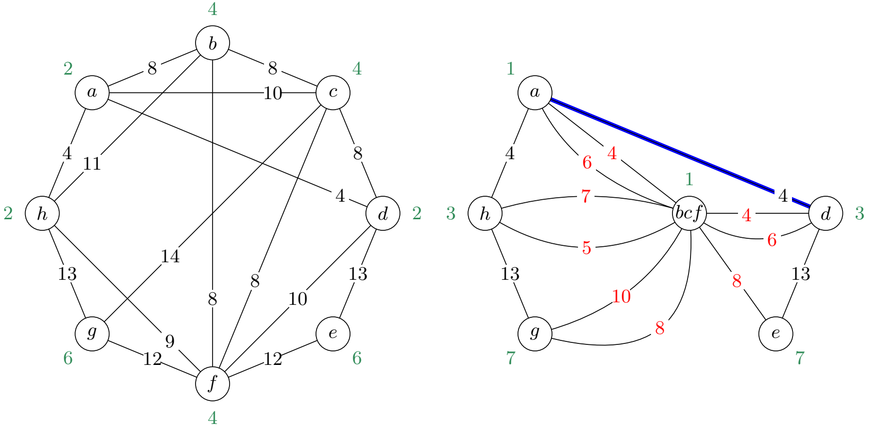
主双対法：例 (1)



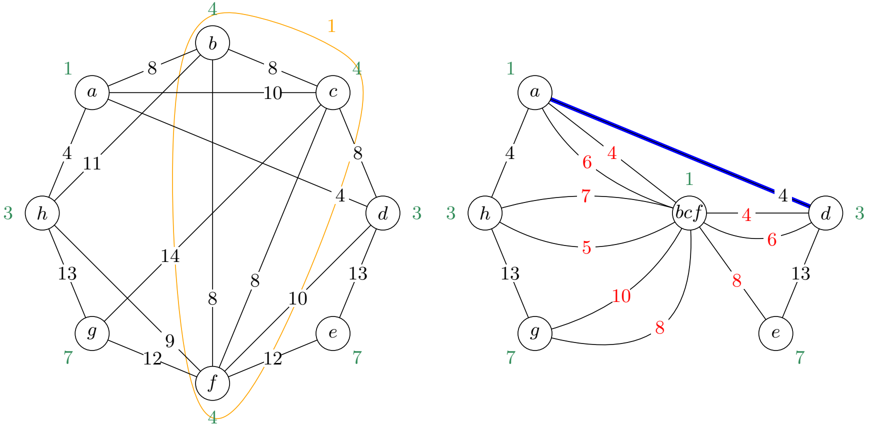
ただし，縮約後のグラフにおける費用も更新する

$c'_{u,v} := c_{u,v} - y_v$ (v は花に含まれる頂点)

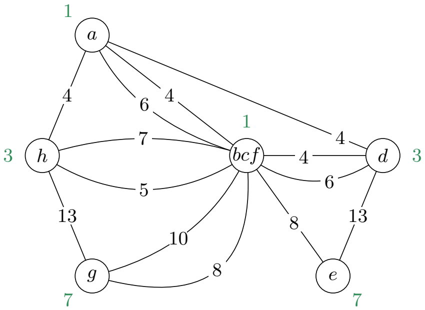
主双対法：例 (1)



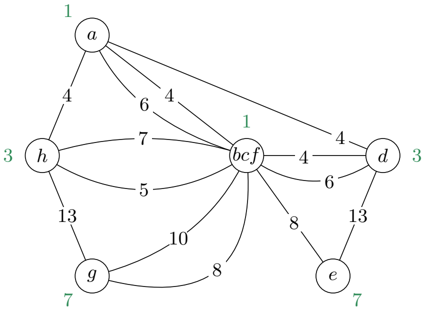
この例では，$\varepsilon = 1$

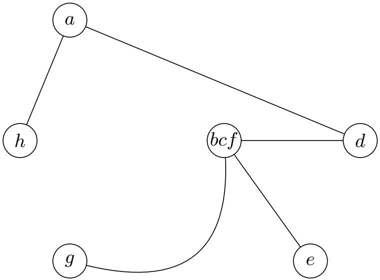


G において，双対変数は次のように解釈される (口頭説明)



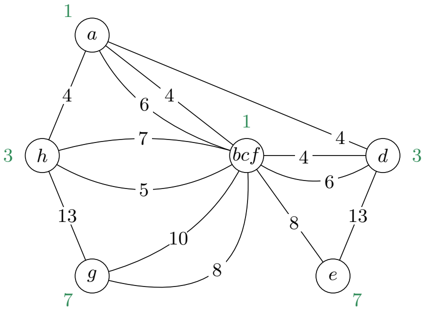
このグラフを G として，各頂点 v に双対変数 y_v が与えられている

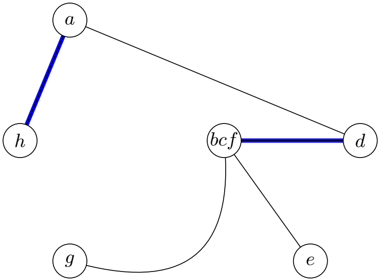




$y_u + y_v = c_{u,v}$ となる辺 $\{u, v\}$ 全体から成るグラフ H を作る

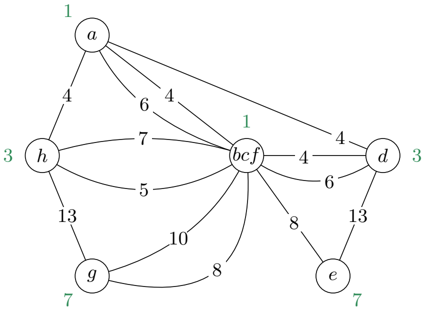
主双対法：例 (2)

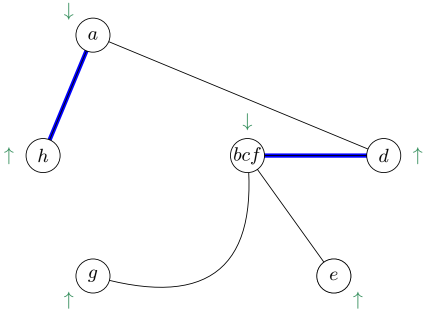




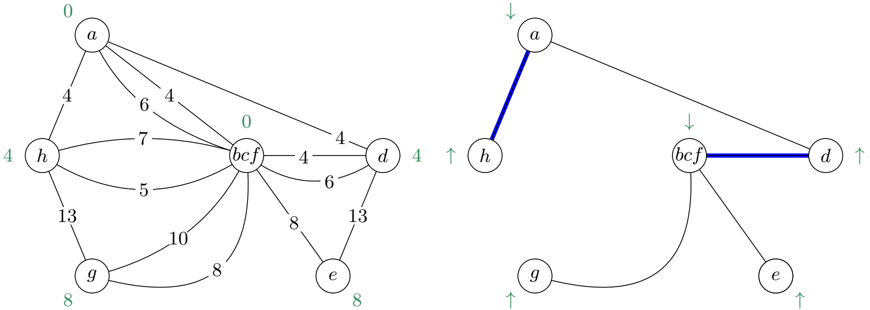
H の最大マッチングを見つける

主双対法：例 (2)



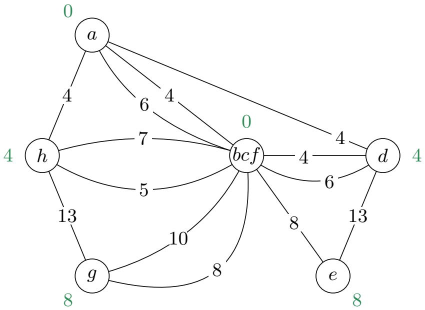


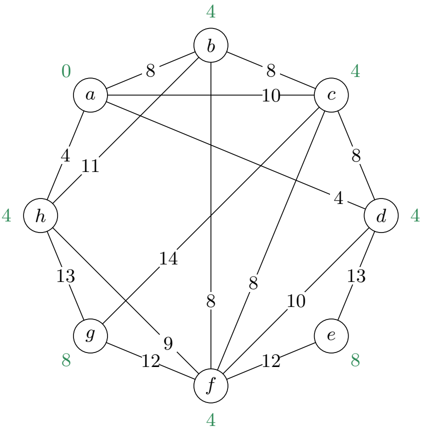
双対変数の更新を行う



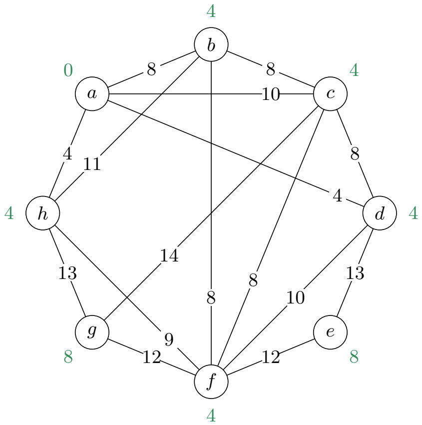
$y_{bcf} = z_{\{b,c,f\}} \geq 0$ なので，$y_{bcf} \geq 0$ であることに注意

主双対法：例 (2)

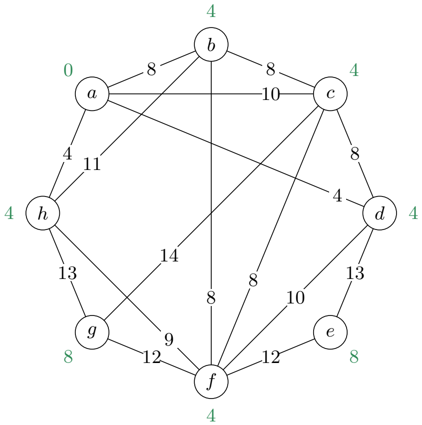


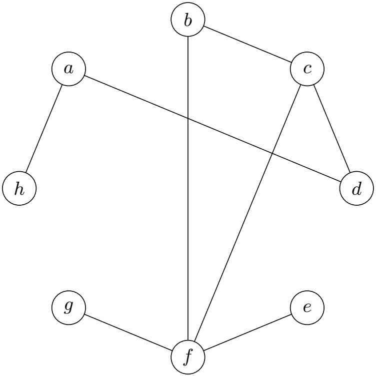


$y_{bcf} = z_{\{b,c,f\}} = 0$ なので，$\{b, c, f\}$ の縮約を戻す

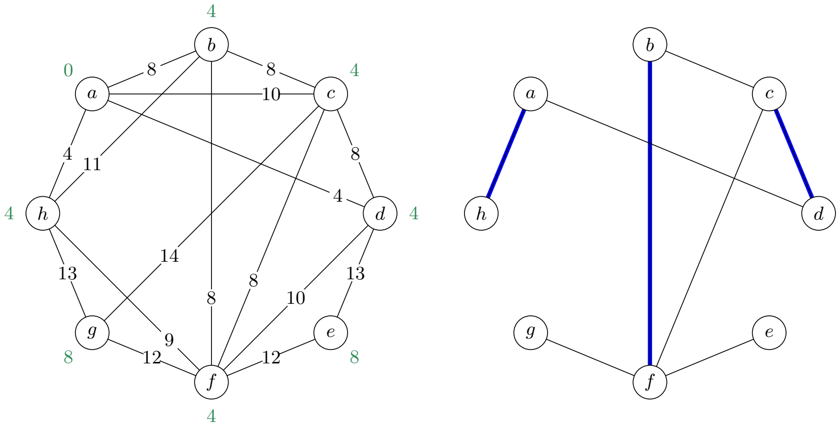


このグラフを G として，各頂点 v に双対変数 y_v が与えられている

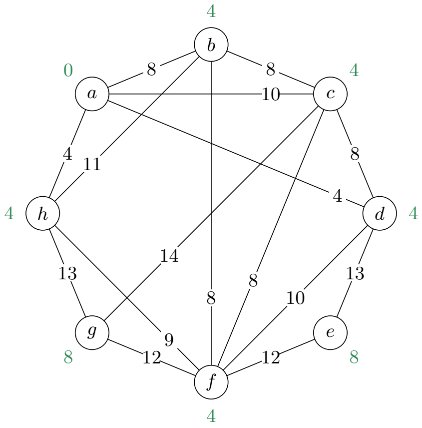


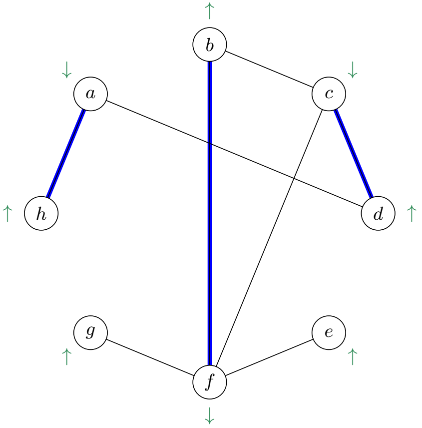


$y_u + y_v = c_{u,v}$ となる辺 $\{u, v\}$ 全体から成るグラフ H を作る

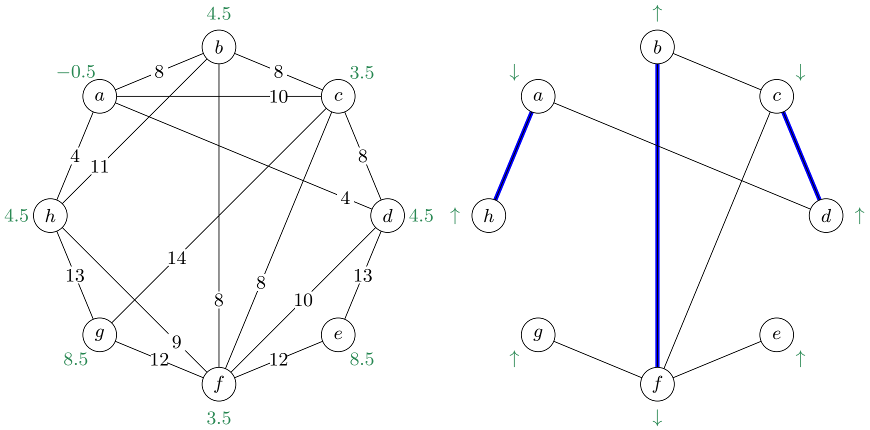


H の最大マッチングを見つける

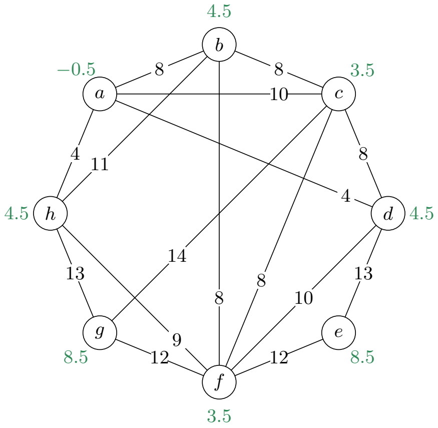




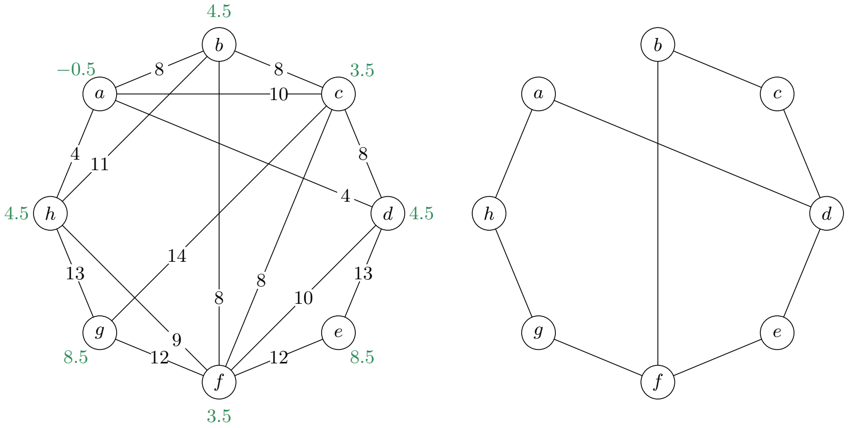
双対変数の更新を行う


4.5
b
−0.5
8
8
3.5
a
10
c
4
11
8
4.5
h
4
d
4.5
14
13
13
8
8
10
g
9
e
8.5
12
12
8.5
f
3.5
↑
b
↓
↓
a
c
↑
h
d
↑
g
e
↑
↑
f
↓

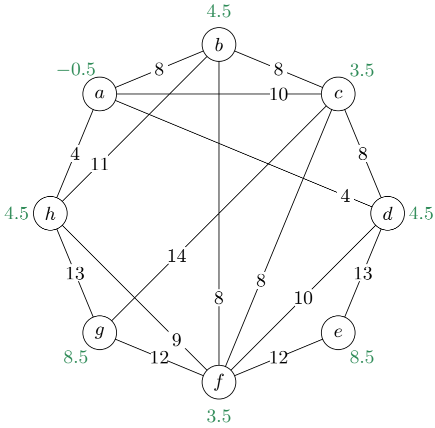
双対変数の更新を行う

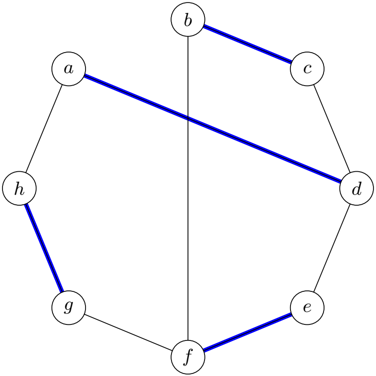


このグラフを G として，各頂点 v に双対変数 y_v が与えられている



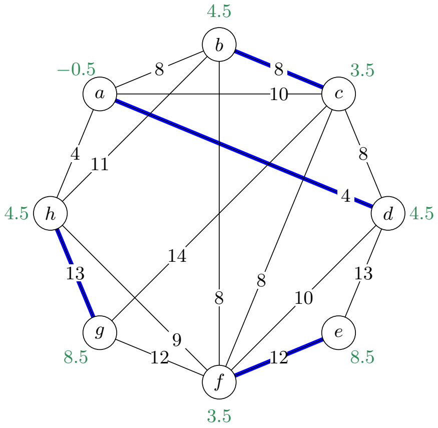
$y_u + y_v = c_{u,v}$ となる辺 $\{u, v\}$ 全体から成るグラフ H を作る





H の最大マッチングを見つける
$\rightsquigarrow$ 完全マッチングが見つかった (終了)

主双対法：例 (最終的に得られた 最小費用完全マッチング)



目次

入力：グラフ $G = (V, E)$，辺費用 $c \colon E \to \mathbb{R}$
出力：G の最小費用完全マッチング $M \subseteq E$，(DLP') の最適解 y, z

主双対法

初期化

- $M := \emptyset$
- すべての $S \in \mathcal{C}$ に対して，$z_S := 0$
- すべての $v \in V$ に対して，$y_v := \frac{1}{2} \cdot \min\{c_{u,v} \mid \{u,v\} \in E\}$

H の構成と M の更新

1. グラフ $H = (V, E')$ を $E' = \{\{u,v\} \in E \mid y_u + y_v = c_{u,v}\}$ で構成
2. H の最大マッチングを計算して，M とする　(第 5 回講義参照)
   (同時に，M に関する花もいくつか得られる)
3. M が完全マッチング $\Rightarrow$ 終了

主双対法 (続き)

$\boxed{G \text{ の更新}}$ ：M に関する花 C が得られているとき

1. $G := G/C$ とする
2. 新しい G において，c を次のように設定

$$c_{u,v} := \begin{cases} \min\{c_{u,w} - y_w \mid w \in C\} & (u \notin C,\ v \text{ は縮約で得られた頂点}) \\ c_{u,v} & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

3. 新しい G に対する双対許容解 y を次のように構成

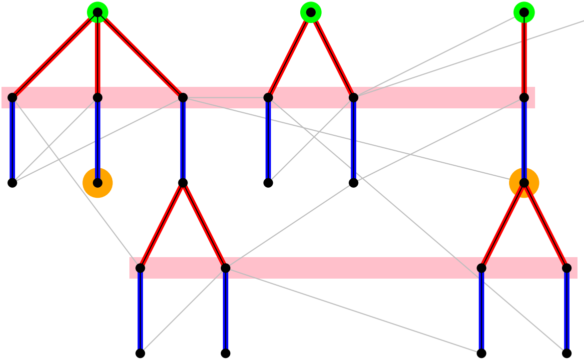
$$y_v := \begin{cases} y_v & (v \notin C) \\ 0 & (v \text{ が縮約で得られた頂点}) \end{cases}$$

主双対法 (続き)

双対許容解の更新

1. y, z を更新 (方法は後述)
2. 縮約で得られた頂点 v に対して $y_v = 0$ であるとき
   - $G :=$ 頂点 v の縮約を解除して得られるグラフ
     (M の辺も縮約から復元，c も復元)
   - $z_C := 0$ (ただし，C を縮約して v が得られた)
3. 「H の構成と M の更新」に戻る

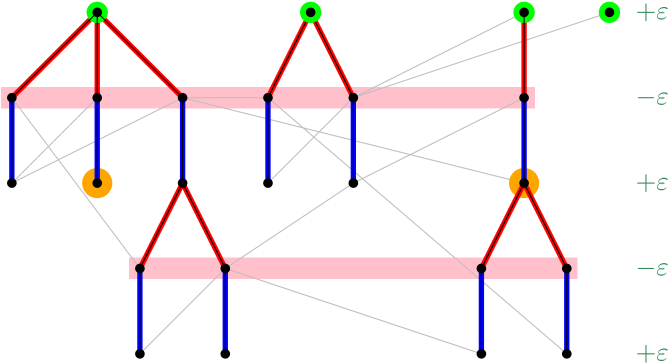
y の更新



ε を定めるときの制約

- 任意の辺 $\{u, v\}$ に対して，$y_u + y_v \leq c_{u,v}$
- 縮約で得られた頂点 v に対して，$y_v \geq 0$

z の更新



この反復において，花 C を縮約して，頂点 v が作られたとき

- $z_C := y_v > 0$

目次

性質：主双対法の正当性

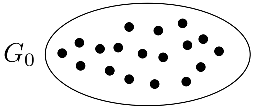
主双対法が停止したとき，
得られる M は最小費用完全マッチングであり，
得られる y, z は (DLP') の最適解である

<u>証明</u>：まず，花の縮約がない場合を考える (つまり，$z_S = 0$ $(\forall\ S \in \mathcal{C})$)

- M は G の完全マッチングである
- M は H の完全マッチングでもあるので，
  任意の $\{u, v\} \in M$ に対して $y_u + y_v = c_{u,v}$
- $\therefore x_{\{u,v\}} > 0$ ならば，$y_u + y_v + \displaystyle\sum_{\substack{S \in \mathcal{C}, \\ \{u,v\} \in \delta(S)}} z_S = c_{u,v}$
- $\therefore$ 主相補性と双対相補性は満たされる

花の縮約がある場合を考える

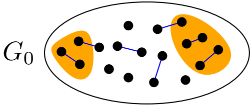
- $G_0 = G$ として，
  G_0 から i 回の花の縮約で得られたグラフを G_i とする
- i が大きい方から順に進める帰納法で証明する



- i が最も大きい場合は，既に証明した

花の縮約がある場合を考える

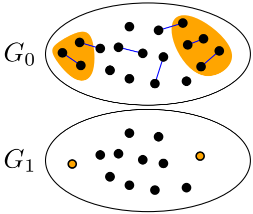
- $G_0 = G$ として，
  G_0 から i 回の花の縮約で得られたグラフを G_i とする
- i が大きい方から順に進める帰納法で証明する



- i が最も大きい場合は，既に証明した

花の縮約がある場合を考える

- $G_0 = G$ として，
  G_0 から i 回の花の縮約で得られたグラフを G_i とする
- i が大きい方から順に進める帰納法で証明する



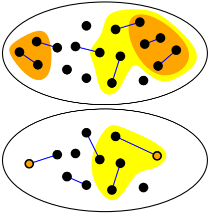
- i が最も大きい場合は，既に証明した

花の縮約がある場合を考える

- $G_0 = G$ として，
  G_0 から i 回の花の縮約で得られたグラフを G_i とする
- i が大きい方から順に進める帰納法で証明する

G_0

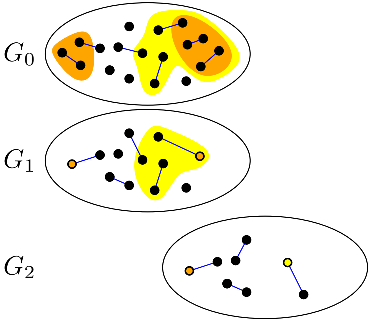
G_1



- i が最も大きい場合は，既に証明した

花の縮約がある場合を考える

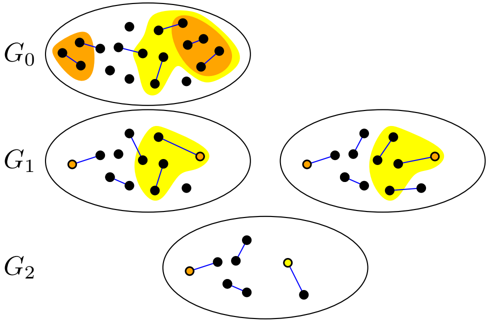
- $G_0 = G$ として，
  G_0 から i 回の花の縮約で得られたグラフを G_i とする
- i が大きい方から順に進める帰納法で証明する



- i が最も大きい場合は，既に証明した

花の縮約がある場合を考える

- $G_0 = G$ として，
  G_0 から i 回の花の縮約で得られたグラフを G_i とする
- i が大きい方から順に進める帰納法で証明する



- i が最も大きい場合は，既に証明した

主双対法の正当性 (2)

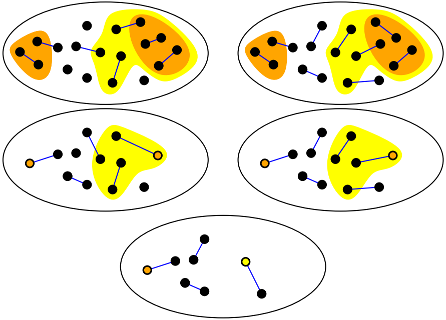
花の縮約がある場合を考える

- $G_0 = G$ として，
  G_0 から i 回の花の縮約で得られたグラフを G_i とする
- i が大きい方から順に進める帰納法で証明する

G_0

G_1

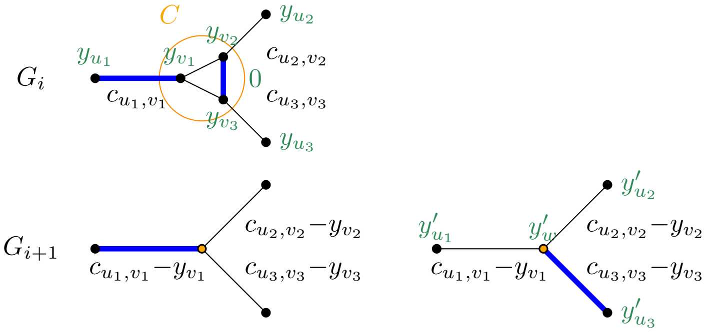
G_2



- i が最も大きい場合は，既に証明した

G_{i+1} に対して正しいと仮定して，G_i に対して証明する

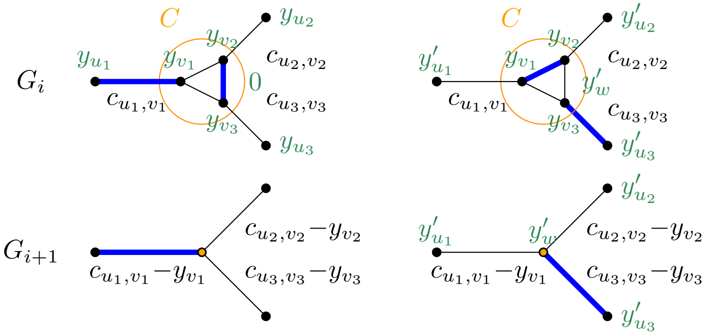
- G_i に対して，双対許容解 y, z があり，
  その花 C を縮約して，頂点 w を作ることで G_{i+1} ができたとする
- G_{i+1} における双対最適解を y', z'，完全マッチングを M' とする



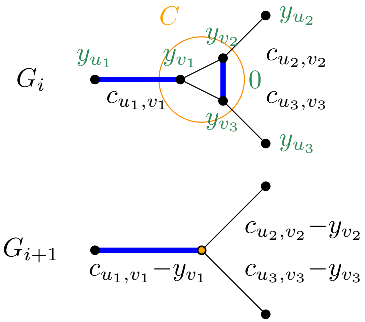
- y', z' から G_i の双対許容解 y'', z'' を次のように作る (戻す)

$$y''_v = \begin{cases} y'_v & (v \text{ が } C \text{ の頂点ではないとき}) \\ y_v & (v \text{ が } C \text{ の頂点であるとき}) \end{cases}$$

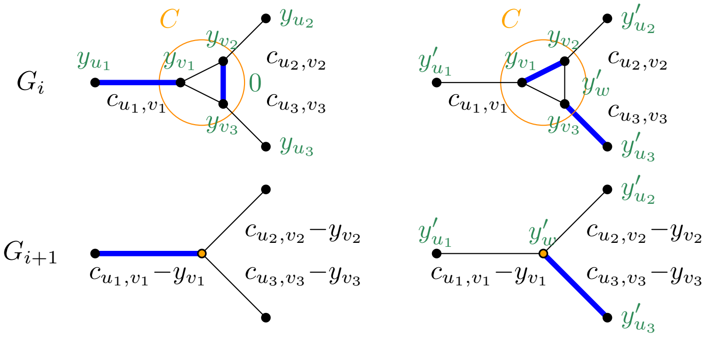
$$z''_S = \begin{cases} z'_S & (S \text{ が } C \text{ ではないとき}) \\ y'_w & (S \text{ が } C \text{ であるとき}) \end{cases}$$



- このとき，y'', z'' が G_i の双対許容解であり，
かつ，双対最適解であることも証明できる (詳細は省略)



詳細の雰囲気



G_i
G_{i+1}
C
y_{u_1}
y_{u_2}
y_{u_3}
y_{v_1}
y_{v_2}
y_{v_3}
0
c_{u_1,v_1}
c_{u_2,v_2}
c_{u_3,v_3}
$c_{u_1,v_1} - y_{v_1}$
$c_{u_2,v_2} - y_{v_2}$
$c_{u_3,v_3} - y_{v_3}$
y'_{u_1}
y'_{u_2}
y'_{u_3}
y'_w

目次

今日のまとめ と 次回以降の予告

今日の目標

- 一般グラフの最小費用完全マッチング問題を解くためのアルゴリズムを記述する

次回の予告

- このアルゴリズムが多項式時間アルゴリズムであることの説明

目次