離散最適化基礎論　第 11 回
一般グラフの最小費用完全マッチング：完全双対整数性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 1 月 12 日

最終更新：2021 年 1 月 14 日　14:41

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)

⋆ 祝日 のため 休み (11/3)

5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/24)

7. 整数計画法の復習 (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

8 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
★ 国際会議 のため 休み (12/15)
9 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

二部グラフの 最大マッチング問題	→	二部グラフの 最小費用完全マッチング問題
↓		↓
一般グラフの 最大マッチング問題	→	一般グラフの 最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

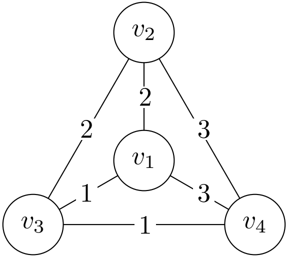
「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 $\rightsquigarrow$
  費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

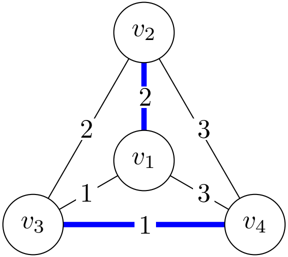
定義：最小費用完全マッチング問題
(minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c\colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合，「存在しない」と出力)



定義：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



今日の目標

- 前回残した証明を行う
- 完全双対整数性に関する議論を行う

最小費用完全マッチング問題は次の整数計画問題として定式化できる

(IP)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e\in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
 & x_e \in \{0,1\} & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

ここで，$\delta(v)$ は頂点 v に接続する辺全体の集合

線形計画緩和 (LP)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 && (\forall\, v \in V), \\
& x_e \geq 0 && (\forall\, e \in E)
\end{aligned}
$$

前回 観察したこと

$G = (V, E)$ が二部グラフでないとき，
(LP) の最適解が (IP) の許容解とならない場合がある

この観察から，二部グラフのときの同じ「簡単」なアルゴリズムでは
一般グラフの最小費用完全マッチング問題を解けないと分かる

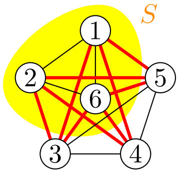
緩和を強化するため，次の制約を追加する

定義：奇カット不等式 (odd cut inequality)

任意の頂点部分集合 $S \subseteq V$ (ただし，$|S| \geq 3$ で，$|S|$ は奇数) に対して

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1$$

ここで，$\delta(S)$ は一端点を S に，もう一端点を $V \setminus S$ に持つ辺全体の集合



$S = \{1, 2, 6\}$ のとき，

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{36} + x_{46} + x_{56} \geq 1$$

奇カット不等式を追加した整数計画問題

以後，$\mathcal{C} = \{S \subseteq V \mid |S| \geq 3, |V - S| \geq 3, |S|$ が奇数 $\}$ とする

(IP’)：奇カット不等式を追加した整数計画問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & (\forall\ S \in \mathcal{C}), \\
& x_e \in \{0, 1\} & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

性質

(IP) の許容領域 $=$ (IP’) の許容領域

(LP') : (IP') の線形計画緩和

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & (\forall\ S \in \mathcal{C}), \\
& x_e \geq 0 & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

定理 (Edmonds '65)

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，
(LP') の最適解で，(IP) の許容解となるものが存在する

- 証明を 今から行う
- この定理から，
  一般グラフの最小費用完全マッチング問題に対しても，
  主双対法が作れる (ような気がしてくる)

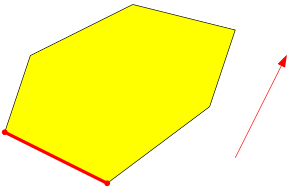
$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{(IP) の最適値}} & \geq & \boxed{\text{(LP) の最適値}} \\
\parallel & & \wedge\!\!| \\
\boxed{\text{(IP') の最適値}} & = & \boxed{\text{(LP') の最適値}}
\end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ は定数

標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

許容領域は凸多面体



事実 (証明は省略)

標準形の線形計画問題に対して，
最適解が存在する $\Rightarrow$ 許容領域の端点であるような最適解が存在する

次のように書き換えれば，(LP') も標準形の線形計画問題と見なせる

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 && (\forall\ v \in V), \\
& \sum_{e \in \delta(S)} x_e - X_S = 1 && (\forall\ S \in \mathcal{C}), \\
& x_e \geq 0 && (\forall\ e \in E), \\
& X_S \geq 0 && (\forall\ S \in \mathcal{C})
\end{aligned}
$$

X_S はスラック変数 (slack variable) と呼ばれる

- この線形計画問題の許容領域の端点 $(x, X) \in \mathbb{R}^E \times \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ を考える
- $X \in \mathbb{R}^{\mathcal{C}}$ を忘れることで，(LP') の許容解 $x \in \mathbb{R}^E$ が得られる

目次

Edmonds の完全マッチング多面体定理：頂点数が奇数の場合

無向グラフ $G = (V, E)$ の頂点数が奇数の場合 ($|V| \geq 3$ が奇数の場合)

- G は完全マッチングを持たない ($\therefore$ (IP) は許容解を持たない)
- $\boxed{\text{証明すればよいこと}}$：(LP') も許容解を持たない

復習：奇カット不等式

任意の頂点部分集合 $S \subseteq V$ (ただし，$|S| \geq 3$ で，$|S|$ は奇数) に対して

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1$$

- $S = V$ とすると，$\delta(S) = \emptyset$
- $\therefore \sum_{e \in \delta(S)} x_e = 0 < 1$

つまり，$|V|$ が奇数の場合，奇カット不等式を満たす x は存在しない

((LP') は許容解を持たない)

定理：再掲 (Edmonds '65)

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，
(LP') の最適解で，(IP) の許容解となるものが存在する

- 今から紹介する証明は Schrijver ('83) を参考にしたもの
- $|V|$ が偶数であるときのみ 考えればよい
  ($|V|$ が奇数のときは 既に証明した)

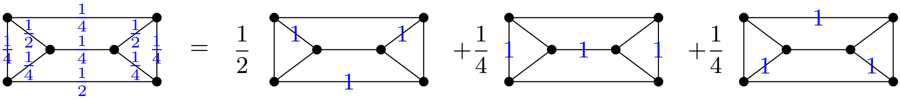
Edmonds の完全マッチング多面体定理を証明するには，
次を証明すれば十分である

強めた形：実際に証明する定理

頂点数が偶数の任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，次が成立

$x \in \mathbb{R}^E$ が (LP') の許容解であるならば，
x は (IP) の許容解の凸結合として表現できる

例：



「強めた形」が正しいとする

- x を (LP') の最適解とする
- x は (IP) の許容解の凸結合として表現できる

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$$

- このとき，

$$c^\top x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^\top x^{(i)} \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^\top x = c^\top x$$

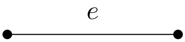
- $\therefore x^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, k)$ はどれも (LP') の最適解 □

したがって，強めた形が証明できればよい

- <u>強めた形の証明</u>：$|V| + |E|$ に関する帰納法

$|V| = 2$ かつ $|E| = 1$ のとき ($|V| + |E| = 3$ のとき)

- 考えるグラフは以下のものに限る
- このとき，(IP) の許容領域と (LP') の許容領域は等しく，許容解は $x_e = 1$ に限られる (つまり，これは (IP) と (LP') の最適解)



一般の場合 ($|V| + |E| > 3$ のとき)

- (LP') の許容解 $x \in \mathbb{R}^E$ を考える

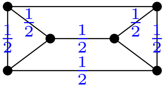
場合分け

1. ある $f \in E$ に対して $x_f = 0$ である
2. ある $f \in E$ に対して $x_f = 1$ である
3. すべての $f \in E$ に対して $0 < x_f < 1$ である

注：すべての $f \in E$ に対して $0 \leq x_f \leq 1$ (なぜ？)

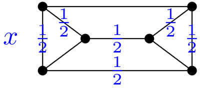
1 ある $f \in E$ に対して $x_f = 0$ である

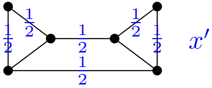
- $G' = (V, E - \{f\})$ と，x の $\mathbb{R}^{E-\{f\}}$ への直射影 x' を考える
- x' は G' に対する (LP') の許容解である (なぜ？)

x 

1 ある $f \in E$ に対して $x_f = 0$ である

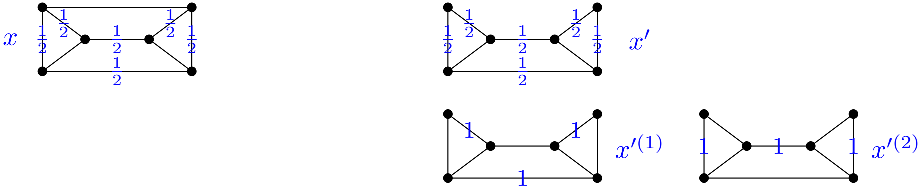
- $G' = (V, E - \{f\})$ と，x の $\mathbb{R}^{E-\{f\}}$ への直射影 x' を考える
- x' は G' に対する (LP') の許容解である (なぜ？)





Edmonds の完全マッチング多面体定理：証明 — 帰納段階：場合 1 (2)

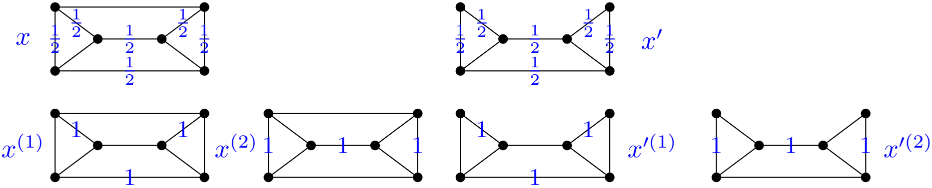
- 帰納法の仮定から
  x' は G' に対する (IP) の許容解 $x'^{(1)}, \ldots, x'^{(k)}$ の凸結合として書ける



- 各 i に対して，次のように $x^{(i)} \in \mathbb{R}^E$ を定義する

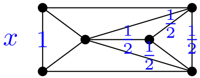
$$x^{(i)}_g = \begin{cases} x'^{(i)}_g & (g \in E - \{f\}) \\ 0 & (g = f) \end{cases}$$

- このとき，x は $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ の凸結合であり，$x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ は G に対する (IP) の許容解である



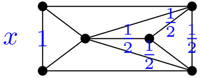
2 ある $f \in E$ に対して $x_f = 1$ である

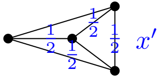
- f の端点を u, v として，u, v に接続する辺全体の集合を F とする
- $G' = (V - \{u, v\}, E - F)$ と，x の $\mathbb{R}^{E-F}$ への直射影 x' を考える
- x' は G' に対する (LP') の許容解である　(なぜ？)



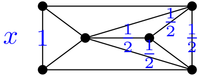
2 ある $f \in E$ に対して $x_f = 1$ である

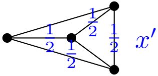
- f の端点を u, v として，u, v に接続する辺全体の集合を F とする
- $G' = (V - \{u, v\}, E - F)$ と，x の $\mathbb{R}^{E-F}$ への直射影 x' を考える
- x' は G' に対する (LP') の許容解である　　(なぜ？)

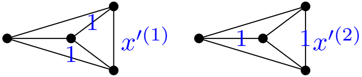




- 帰納法の仮定から
  x' は G' に対する (IP) の許容解 $x'^{(1)}, \ldots, x'^{(k)}$ の凸結合として書ける



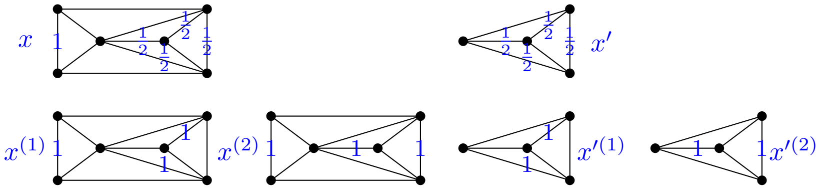




- 各 i に対して，次のように $x^{(i)} \in \mathbb{R}^E$ を定義する

$$x_g^{(i)} = \begin{cases} x_g'^{(i)} & (g \in E - F) \\ 0 & (g \in F - \{f\}) \\ 1 & (g = f) \end{cases}$$

- このとき，x は $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ の凸結合であり，$x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ は G に対する (IP) の許容解である



3 すべての $f \in E$ に対して $0 < x_f < 1$ である

このとき，G がどのような構造を持っているか考える

- G は連結であると仮定できる
  - G の各連結成分に帰納法の仮定を適用すればよい
- G に次数が 1 の頂点は存在しない
  - v の次数が 1 のとき，v に接続する辺 e に対して $x_e = 1$ となる
- $\therefore |E| \geq |V|$

$|E| = |V|$ のとき

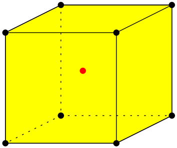
- G は閉路 (注：$|V|$ は偶数であると仮定している)
- この場合は直接証明できる

$|E| > |V|$ のとき

仮定

x は端点許容解であると仮定してよい

なぜならば，x は端点許容解の凸結合として書けるから
(許容領域が有界であることを使っている (詳細は省略))



主張

ある $S \in \mathcal{C}$ に対して $\displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e = 1$

なぜか？ $\rightsquigarrow$ 線形計画問題の端点許容解に関する性質を使う

事実：第 7 回講義の復習

凸多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x \leq b_i \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}\}$ に対して
z が P の端点 $\Rightarrow$ n 個の添え字 i に対して，$a_i^\top z = b_i$

(LP') には等号制約があるので，上の事実をそのまま使えない

- 実際は，n から線形独立な等号制約の数を引くと，同じ事実が成立

事実 (上の事実と同じように証明可能)

標準形の線形計画問題に対して，
z が許容領域の端点 $\Rightarrow$ $n - \mathrm{rank}(A)$ 個の添え字 i に対して $z_i = 0$

注：$\mathrm{rank}(A) \leq \min\{n, m\}$ $\qquad (A \in \mathbb{R}^{n \times m})$

(LP') を標準形に書き換えたものにおいて，$n = |E| + |\mathcal{C}|$，$m = |V| + |\mathcal{C}|$

- $\therefore n - \mathrm{rank}(A) \geq n - m = |E| - |V|$

$|E| > |V|$ と仮定したので，$n - \mathrm{rank}(A) \geq 1$

- $\therefore$ ある $e \in E$ に対して，$x_e = 0$ であるか，または
  ある $S \in \mathcal{C}$ に対して，$X_S = 0$

場合 3 の仮定 (任意の $f \in E$ に対して，$0 < x_f < 1$) より，

ある $S \in \mathcal{C}$ に対して，$X_S = 0$ となる

$\therefore$ ある $S \in \mathcal{C}$ に対して，$\displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e = 1$

主張

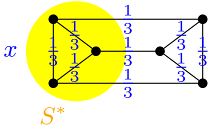
ある $S \in \mathcal{C}$ に対して $\displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e = 1$

- そのような S を S^* とする

このとき，G', G'' を次のように構成する

- $G' = G$ において S^* を縮約したグラフ
- $G'' = G$ において $V - S^*$ を縮約したグラフ

(注：G', G'' は多重グラフかもしれない)



主張

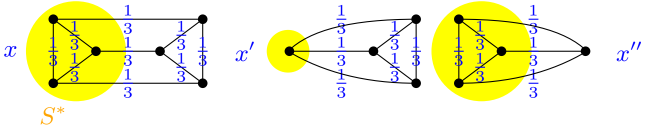
ある $S \in \mathcal{C}$ に対して $\sum_{e \in \delta(S)} x_e = 1$

- そのような S を S^* とする

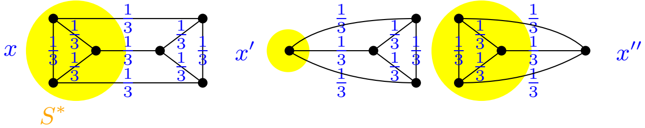
このとき，G', G'' を次のように構成する

- $G' = G$ において S^* を縮約したグラフ
- $G'' = G$ において $V - S^*$ を縮約したグラフ

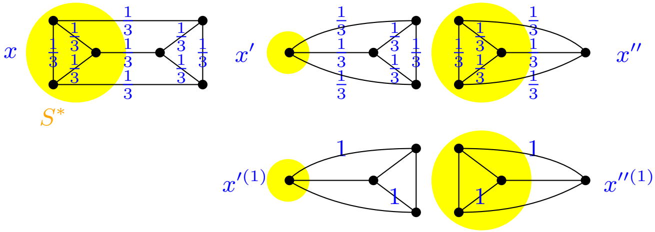
(注：G', G'' は多重グラフかもしれない)



- x を G', G'' に直射影したものをそれぞれ x', x'' とする
- このとき，
  x', x'' はそれぞれ G', G'' における (LP') の許容解である



- 帰納法の仮定から
  x' は G' に対する (IP) の許容解 $x'^{(1)}, \ldots, x'^{(k)}$ の凸結合として書け，
  x'' は G'' に対する (IP) の許容解 $x''^{(1)}, \ldots, x''^{(k)}$ の凸結合として書ける



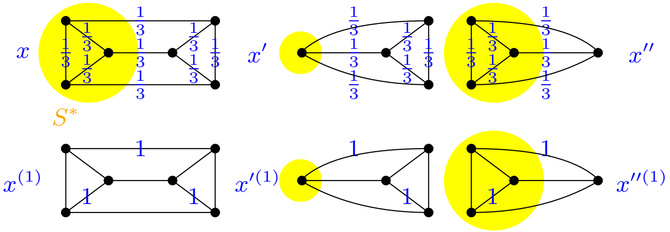
- ここで，任意の i に対して，任意の $g \in \delta(S^*)$ において
  $x'^{(i)}_g = x''^{(i)}_g$ で，その係数が等しいようにできる

(これは簡単ではないが正しい)

- 各 i に対して，次のように $x^{(i)} \in \mathbb{R}^E$ を定義する

$$x^{(i)}_g = \begin{cases} x''^{(i)}_g & (g \in E(S^*)) \\ x'^{(i)}_g & (g \in \delta(S^*)) \\ x'^{(i)}_g & (g \in E(V - S^*)) \end{cases}$$

- このとき，x は $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ の凸結合であり，$x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ は G に対する (IP) の許容解である



これで，証明が完了した □

G が二部グラフのとき，(LP) の双対問題 (DLP) の最適解として，
各成分が整数になるものが存在することが言える

第 9 回の復習 (完全双対整数性)

すべての辺 $e \in E$ に対して，費用 $c(e)$ が整数であるとき，
(DLP) の最適解 y として，各頂点 v に対して y_v が整数であるものが存在

$\because$ ハンガリー法における ε が必ず整数であるから

G が一般グラフのとき，
(LP') の双対問題 (DLP') にはそのような性質がない

(DLP') : (LP') の双対問題

変数は，各 $v \in V$ に対する y_v と
各 $S \in \mathcal{C}$ に対する z_S

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{v \in V} y_v + \sum_{S \in \mathcal{C}} z_S & \\
\text{subject to} & \displaystyle y_u + y_v + \sum_{\substack{S \in \mathcal{C}, \\ e \in \delta(S)}} z_S \leq c_e & (\forall\ e = \{u, v\} \in E), \\
& z_S \geq 0 & (\forall\ S \in \mathcal{C})
\end{array}
$$

$\mathcal{C} = \{S \subseteq V \mid |S| \geq 3, |V - S| \geq 3, |S|$ が奇数 $\}$

頂点数 4 の完全グラフで，すべての辺費用が 1 の場合を考える

- このとき，$\mathcal{C} = \emptyset$ であり，(DLP') は次のように書ける

(DLP')：(LP') の双対問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\
\text{subject to} & y_1 + y_2 \le 1, y_1 + y_3 \le 1, y_1 + y_4 \le 1, \\
 & y_2 + y_3 \le 1, y_2 + y_4 \le 1, y_3 + y_4 \le 1
\end{array}
$$

この (DLP') の最適値は 2 で，
$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ が唯一の最適解

今日のまとめ と 次回以降の予告

今日の目標

- 前回残した証明を行う
- 完全双対整数性に関する議論を行う

次回と次々回の予告

- 一般グラフの最小費用完全マッチング問題を解くアルゴリズムを記述する

目次