離散最適化基礎論　第 10 回
一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 1 月 5 日

最終更新：2021 年 1 月 7 日　13:08

スケジュール 前半

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)
- ⋆ 祝日 のため 休み (11/3)
5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)
- ⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/24)
7. 整数計画法の復習 (12/1)

スケジュール 後半 (予定)

- 8 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
- ⋆ 国際会議 のため 休み (12/15)
- 9 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
- 10 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
- 11 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
- 12 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
- 13 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
- 14 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

二部グラフの 最大マッチング問題	→	二部グラフの 最小費用完全マッチング問題
↓		↓
一般グラフの 最大マッチング問題	→	一般グラフの 最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

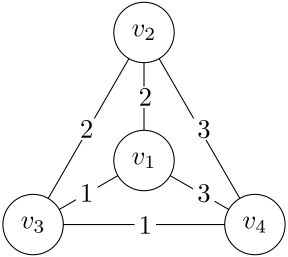
「これら4つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 ⇝ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

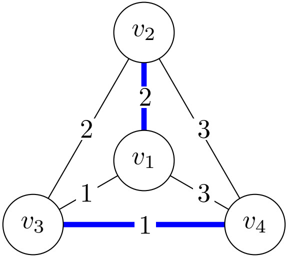
定義：最小費用完全マッチング問題
(minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



定義：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c\colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ) (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



今日の目標

一般グラフの最小費用完全マッチング問題を
線形計画問題として解く

- 最小費用完全マッチング問題を整数計画問題として定式化する
- その線形計画緩和の性質を調べる

重要な概念：緩和の強化

- 奇カット不等式による

最小費用完全マッチング問題は次の整数計画問題として定式化できる

(IP)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\, v \in V), \\
& x_e \in \{0, 1\} & (\forall\, e \in E)
\end{array}
$$

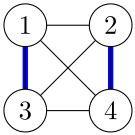
ここで，$\delta(v)$ は頂点 v に接続する辺全体の集合

最小費用完全マッチング問題の定式化：行列とベクトルを使って書き直す (1)

行列 $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ を次のように定義する

各 $v \in V, e \in E$ に対して $$a_{ve} = \begin{cases} 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点でない}), \\ 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \end{cases}$$

この行列 A はグラフ G の**接続行列** (incidence matrix) と呼ばれる



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

このとき，(IP) は次のように書き換えられる

(IP)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & c^\top x \\
\text{subject to} \quad & Ax = 1, \\
& x \in \{0,1\}^E
\end{aligned}
$$

線形計画緩和 (LP)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \qquad (\forall\ v \in V), \\
& x_e \geq 0 \qquad (\forall\ e \in E)
\end{aligned}
$$

定理 (第 8 回の復習) (Birkhoff '46)

$G = (V, E)$ が二部グラフ $\Rightarrow$
(LP) の最適解で，(IP) の許容解となるものが必ず存在する

つまり，

- (IP) の最適値 $=$ (LP) の最適値
- (LP) の最適解が (IP) の許容解 $\Rightarrow$ その (LP) の最適解は (IP) の最適解

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ は 二部グラフ $G = (V, E)$ の接続行列

整数計画問題 (IP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = 1, \\ & x \in \{0,1\}^E \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = 1, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^V \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

(DIP) の最適値 $\leq$ (DLP) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (IP) の最適値

- $\therefore$ (LP) を解けば，(IP) が解ける

目次

線形計画緩和 (LP)

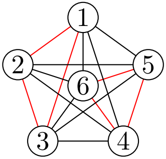
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
 & x_e \geq 0 & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

今から観察すること

$G = (V, E)$ が二部グラフでないとき，
(LP) の最適解が (IP) の許容解とならない場合がある

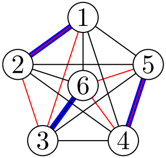
この観察から，二部グラフのときの同じ「簡単」なアルゴリズムでは
一般グラフの最小費用完全マッチング問題を解けないと分かる

次のグラフを考える (赤い辺 の費用は 0, 黒い辺 の費用は 1)



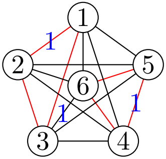
二部グラフでないとき，困る例 (1)

次のグラフを考える (赤い辺 の費用は 0， 黒い辺 の費用は 1)



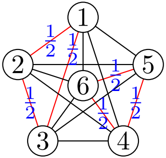
最小費用完全マッチングの費用は 1

次のグラフを考える ($\boxed{\text{赤い辺}}$ の費用は 0, $\boxed{\text{黒い辺}}$ の費用は 1)



最小費用完全マッチングの費用は 1

次のグラフを考える ($\boxed{\text{赤い辺}}$ の費用は 0, $\boxed{\text{黒い辺}}$ の費用は 1)



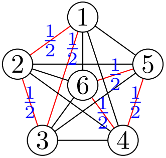
(LP) の最適値は 0 で，この最適解は (IP) の許容解ではない

線形計画緩和 (LP) 再掲

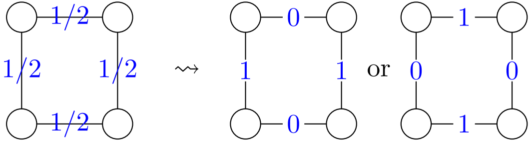
$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\ & x_e \geq 0 & (\forall\ e \in E) \end{array}$$

何が問題点なのか？

- 長さが奇数の閉路上で，変数の値が $1/2$ となる部分ができてしまう



- 長さが偶数の閉路では，これが問題にならなかった
  (Birkhoff の定理の証明を思い出す)



しかし，最小費用完全マッチング問題を主双対法で解こうと思ったら，「(LP) の最適解で，(IP) の許容解となるものが必ず存在する」となってほしい

緩和の強化：問題点を解決するためのアイディア

- (LP) に制約を追加して，別の線形計画問題 (LP') を作る
- 「(LP') の最適解で，(IP) の許容解となるものが必ず存在する」ということを証明する

これで，主双対法が使えるようになる (かもしれない)

整数計画問題 (IP)

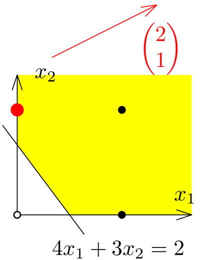
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

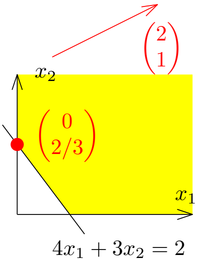
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$





(LP) の最適解が (IP) の許容解ではない

整数計画問題 (IP)

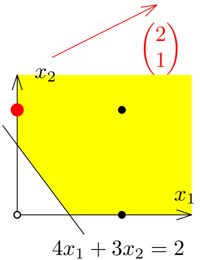
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

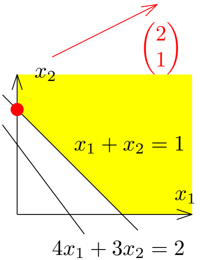
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

線形計画緩和の強化 (LP')

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \end{array}$$





(LP') の最適解が (IP) の許容解になった

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{(IP)}} & \rightarrow \text{(1) 緩和} \rightarrow & \boxed{\text{(LP)}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{(2) 制約の追加} & & \text{(2) 制約の追加} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\boxed{\text{(IP')}} & \rightarrow \text{(1) 緩和} \rightarrow & \boxed{\text{(LP')}}
\end{array}$$

満たしていなくてはならないこと

1. (IP) から (LP) を経由して得た (LP') = (IP) から (IP') を経由して得た (LP')
2. (LP) の許容領域 $\supseteq$ (LP') の許容領域
3. (IP) の許容領域 $=$ (IP') の許容領域

目次

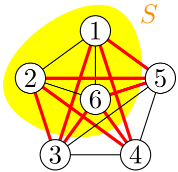
緩和を強化するため，次の制約を追加する

定義：奇カット不等式 (odd cut inequality)

任意の頂点部分集合 $S \subseteq V$ (ただし，$|S| \geq 3$ で，$|S|$ は奇数) に対して

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1$$

ここで，$\delta(S)$ は一端点を S に，もう一端点を $V \setminus S$ に持つ辺全体の集合



$S = \{1, 2, 6\}$ のとき，

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{36} + x_{46} + x_{56} \geq 1$$

以後，$\mathcal{C} = \{S \subseteq V \mid |S| \geq 3, |S|$ が奇数 $\}$ とする

(IP’)：奇カット不等式を追加した整数計画問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & (\forall\ S \in \mathcal{C}), \\
& x_e \in \{0, 1\} & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

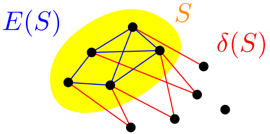
「(IP) の許容領域 $\supseteq$ (IP') の許容領域」となることは，すぐに分かるが
次の性質は，逆の包含関係も成り立つことを言っている

性質

(IP) の許容領域 $\subseteq$ (IP') の許容領域

証明：(IP) の許容解 $x \in \mathbb{R}^E$ を任意に選ぶ

- 証明すべきことは，x が (IP') の許容解であること
- つまり，x が奇カット不等式を満たすことを証明すればよい
- 任意の $S \in \mathcal{C}$ を考える
- このとき，$E(S)$ で，両端点を S に持つ辺全体の集合を表すと…

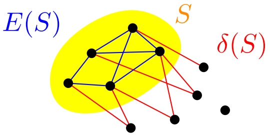


証明 (続き)：

$$\sum_{v\in S}\sum_{e\in\delta(v)} x_e = \sum_{v\in S} 1 = |S| \quad \text{であり，一方で}$$

$$\sum_{v\in S}\sum_{e\in\delta(v)} x_e = \sum_{e\in E(S)} 2x_e + \sum_{e\in\delta(S)} x_e$$

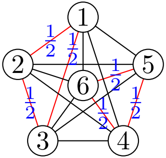
- $|S|$ は奇数，$x_e \in \{0,1\}$ なので，$\displaystyle\sum_{e\in\delta(S)} x_e$ は奇数
- $\displaystyle\therefore \sum_{e\in\delta(S)} x_e \geq 1$ □



(LP') : (IP') の線形計画緩和

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & (\forall\ S \in \mathcal{C}), \\
& x_e \geq 0 & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

先の「困る例」にあった (LP) の最適解は，奇カット不等式を満たさない



- 奇カット不等式を満たすとすると，$S = \{1,2,3\}$ に対して

$$x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \geq 1$$

- 一方で，この解において，

$$x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 0$$

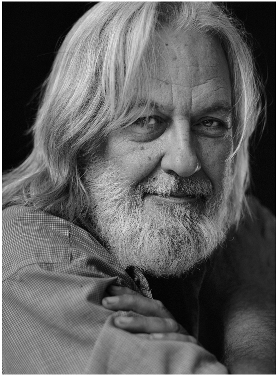
$\rightsquigarrow$ 奇カット不等式により，緩和が強化された

定理 (Edmonds '65)

任意の無向グラフ G に対して，
(LP') の最適解で，(IP) の許容解となるものが存在する

- 証明を行うのは次回
- この定理から，
一般グラフの最小費用完全マッチング問題に対しても，
主双対法が作れる (ような気がしてくる)

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{(IP) の最適値}} & \geq & \boxed{\text{(LP) の最適値}} \\ \| & & \rotatebox{90}{$\geq$} \\ \boxed{\text{(IP') の最適値}} & = & \boxed{\text{(LP') の最適値}} \end{array}$$



https://engineering.jhu.edu/ams/events/the-goldman-distinguished-lecture-series-jack-edmonds-bloomberg-272/

目次

強化された線形計画緩和 (LP') 再掲

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & (\forall\ S \in \mathcal{C}), \\
& x_e \geq 0 & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

いまから行うこと

- (LP') の双対問題 (DLP') を書くこと

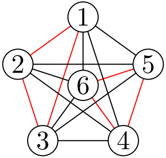
細かい導出過程は説明しないので,
第 6 回講義の「別の形の線形計画問題に対する…」を参照

(DLP')：(LP') の双対問題

変数は，各 $v \in V$ に対する y_v と
各 $S \in \mathcal{C}$ に対する z_S

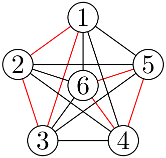
$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{v \in V} y_v + \sum_{S \in \mathcal{C}} z_S & \\
\text{subject to} & \displaystyle y_u + y_v + \sum_{\substack{S \in \mathcal{C}, \\ e \in \delta(S)}} z_S \leq c_e & (\forall\ e = \{u, v\} \in E), \\
& z_S \geq 0 & (\forall\ S \in \mathcal{C})
\end{array}
$$

目的関数：$\displaystyle\sum_{v \in V} y_v + \sum_{S \in \mathcal{C}} z_S$



$$
\begin{aligned}
&y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + \\
&z_{\{1,2,3\}} + z_{\{1,2,4\}} + z_{\{1,2,5\}} + z_{\{1,2,6\}} + z_{\{1,3,4\}} + z_{\{1,3,5\}} + z_{\{1,3,6\}} + \\
&z_{\{1,4,5\}} + z_{\{1,4,6\}} + z_{\{1,5,6\}} + z_{\{2,3,4\}} + z_{\{2,3,5\}} + z_{\{2,3,6\}} + z_{\{2,4,5\}} + \\
&z_{\{2,4,6\}} + z_{\{3,4,5\}} + z_{\{3,4,6\}} + z_{\{4,5,6\}} + \\
&z_{\{1,2,3,4,5\}} + z_{\{1,2,3,4,6\}} + z_{\{1,2,3,5,6\}} + z_{\{1,2,4,5,6\}} + z_{\{1,3,4,5,6\}} + z_{\{2,3,4,5,6\}}
\end{aligned}
$$

制約：$y_u + y_v + \sum_{\substack{S \in \mathcal{C}, \\ e \in \delta(S)}} z_S \leq c_e \qquad (\forall\ e = \{u, v\} \in E)$



$e = \{1, 2\}$ に対して

$$
\begin{array}{l}
y_1 + y_2 + \\
z_{\{1,3,4\}} + z_{\{1,3,5\}} + z_{\{1,3,6\}} + z_{\{1,4,5\}} + z_{\{1,4,6\}} + z_{\{1,5,6\}} + \\
z_{\{2,3,4\}} + z_{\{2,3,5\}} + z_{\{2,3,6\}} + z_{\{2,4,5\}} + z_{\{2,4,6\}} + z_{\{2,5,6\}} + \\
z_{\{1,3,4,5,6\}} + z_{\{2,3,4,5,6\}}
\end{array}
\leq c_{\{1,2\}}
$$

相補性定理を (LP') と (DLP') に対して書き直すと次のようになる

相補性定理

x が (LP') の最適解，かつ，y, z が (DLP') の最適解 $\Leftrightarrow$

1. x が (LP') の許容解
2. y, z が (DLP') の許容解
3. $$\sum_{\{u,v\} \in E} x_{\{u,v\}} \left(c_{\{u,v\}} - y_u - y_v - \sum_{\substack{S \in \mathcal{C}, \\ \{u,v\} \in \delta(S)}} z_S \right) = 0 \qquad \text{(主相補性)}$$
4. $$\sum_{S \in \mathcal{C}} z_S \left(\sum_{e \in \delta(S)} x_e - 1 \right) = 0 \qquad \text{(双対相補性)}$$

今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

一般グラフの最小費用完全マッチング問題を
線形計画問題として解く

- 最小費用完全マッチング問題を整数計画問題として定式化する
- その線形計画緩和の性質を調べる

重要な概念：緩和の強化

- 奇カット不等式による

次回の予告

- 線形計画緩和の性質 (Edmonds の定理) の証明
- 完全整数双対性に関するコメント

目次