離散最適化基礎論　第 9 回
二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 12 月 22 日

最終更新：2020 年 12 月 24 日　10:17

スケジュール 前半

1	マッチングの用語	(10/6)
2	二部グラフの最大マッチング	(10/13)
3	二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム	(10/20)
4	一般グラフの最大マッチング	(10/27)
⋆	祝日 のため 休み	(11/3)
5	一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム	(11/10)
6	線形計画法の復習	(11/17)
⋆	調布祭片付け のため 休み	(11/24)
7	整数計画法の復習	(12/1)

スケジュール 後半 (予定)

8. 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
- ⋆ 国際会議 のため 休み (12/15)
9. 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10. 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11. 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14. 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

この講義が対象とする 4 つの問題

二部グラフの 最大マッチング問題	$\rightarrow$	二部グラフの 最小費用完全マッチング問題
$\downarrow$		$\downarrow$
一般グラフの 最大マッチング問題	$\rightarrow$	一般グラフの 最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

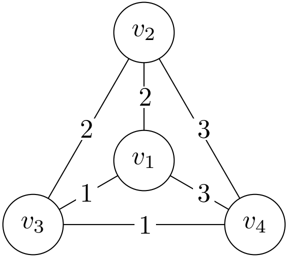
「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における**最大最小定理** (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 $\rightsquigarrow$ 費用有り問題のアルゴリズム (**主双対法**)

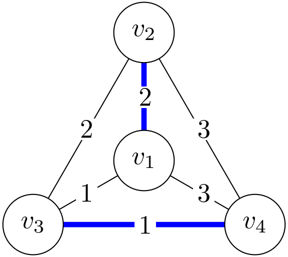
定義：最小費用完全マッチング問題
(minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c\colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



定義：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



今日の目標

二部グラフの最小費用完全マッチング問題を解くための
アルゴリズムを設計する

- 主双対法

目次

最小費用完全マッチング問題の定式化

最小費用完全マッチング問題は次の整数計画問題として定式化できる

(IP)

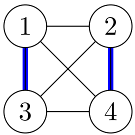
$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\, v \in V), \\
 & x_e \in \{0, 1\} & (\forall\, e \in E)
\end{array}
$$

ここで，$\delta(v)$ は頂点 v に接続する辺全体の集合

行列 $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ を次のように定義する

各 $v \in V, e \in E$ に対して
$$a_{ve} = \begin{cases} 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点でない}), \\ 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \end{cases}$$

この行列 A はグラフ G の**接続行列** (incidence matrix) と呼ばれる



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

このとき，(IP) は次のように書き換えられる

(IP)

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c^\top x \\
\text{subject to} & Ax = 1, \\
 & x \in \{0,1\}^E
\end{array}
$$

線形計画緩和 (LP)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \qquad (\forall\, v \in V), \\
& x_e \geq 0 \qquad (\forall\, e \in E)
\end{aligned}
$$

定理 (前回の復習) (Birkhoff '46)

$G = (V, E)$ が二部グラフ $\Rightarrow$
(LP) の最適解で，(IP) の許容解となるものが必ず存在する

つまり，

- (IP) の最適値 $=$ (LP) の最適値
- (LP) の最適解が (IP) の許容解 $\Rightarrow$ その (LP) の最適解は (IP) の最適解

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ は 二部グラフ $G = (V, E)$ の接続行列

整数計画問題 (IP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = 1, \\ & x \in \{0,1\}^E \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = 1, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^V \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

(DIP) の最適値 $\leq$ (DLP) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (IP) の最適値

- $\therefore$ (LP) を解けば，(IP) が解ける $\rightsquigarrow$ 今日の話題：どう解くか？

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ は 二部グラフ $G = (V, E)$ の接続行列

(LP) と (DLP) を同時に解く

- 相補性条件を満たす x と y を常に保持
- y は (DLP) の許容解であるように保持
- x が (LP) の許容解になるように修正
- そのとき，相補性定理より，x は (LP) の最適解であり，y は (DLP) の最適解である
- x が (IP) の許容解であれば，x は (IP) の最適解

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = 1, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ は二部グラフ $G = (V, E)$ の接続行列

相補性定理 (復習)

x が (LP) の最適解 かつ
y が (DLP) の最適解
$\Leftrightarrow$

1. $Ax = 1,\ x \geq 0$
2. $A^\top y \leq c$
3. $x^\top (A^\top y - c) = 0$

条件 3 を相補性条件と呼ぶ

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 1^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

二部グラフ $G = (A, B, E)$ に対して書き換える

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e & & \\ \text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(a)} x_e = 1 & & (\forall\ a \in A), \\ & \sum_{e \in \delta(b)} x_e = 1 & & (\forall\ b \in B), \\ & x_e \geq 0 & & (\forall\ e \in E) \end{aligned}$$

特に，完全マッチングに対応する x は (LP) の許容解

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & \mathbf{1}^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

二部グラフ $G = (A, B, E)$ に対して書き換える

$$\begin{array}{rll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{a \in A} y_a + \sum_{b \in B} y_b & \\ \text{subject to} & y_a + y_b \leq c_{ab} & (\forall \{a, b\} \in E) \end{array}$$

相補性定理 (復習)

x が (LP) の最適解 かつ y が (DLP) の最適解 $\Leftrightarrow$

1. $Ax = 1,\ x \geq 0$
2. $A^\top y \leq c$
3. $x^\top (A^\top y - c) = 0$

二部グラフ $G = (A, B, E)$ に対して書き換える

3. $\displaystyle\sum_{\{a,b\}\in E} x_{ab}(y_a + y_b - c_{ab}) = 0$

x が (LP) の許容解，y が (DLP) の許容解であるとき，
次のように書き換えられる

3. $x_{ab} > 0$ ならば，$y_a + y_b = c_{ab} \qquad (\forall\ \{a,b\} \in E)$

$\boxed{\text{不変条件}}$：アルゴリズムの実行中，x と y は次の条件を満たし続ける

- $x \in \{0,1\}^E$
- y は (DLP) の許容解である
- x と y は相補性条件を満たす

$\boxed{\text{停止条件}}$：次の条件を満たしたら，アルゴリズムは停止する

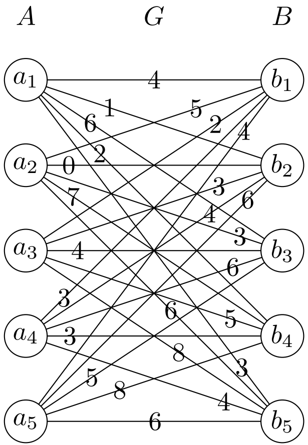
- x は (LP) の許容解である

相補性定理の帰結

アルゴリズムが停止したとき，
x は (LP) の最適解で，y は (DLP) の最適解である

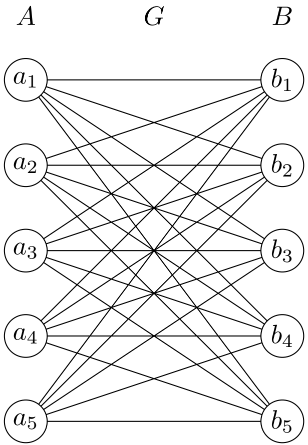
さらに，$x \in \{0,1\}^E$ なので，x は (IP) の最適解である

目次



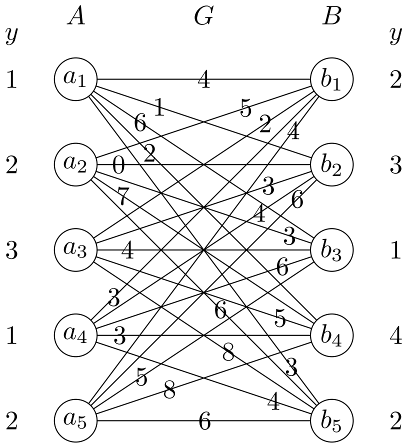
$$c = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

主双対法：例 (1)



$$
c = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \end{array}
$$

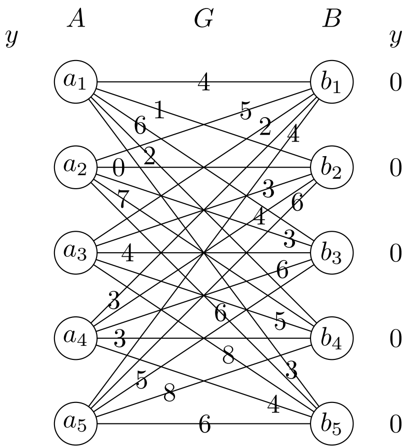
(DLP) の許容解を考える



(DLP)

$$
\begin{array}{ll}
\text{max.} & \displaystyle\sum_{a\in A} y_a + \sum_{b\in B} y_b \\
\text{s.t.} & y_a + y_b \leq c_{ab} \quad (\forall\ \{a,b\} \in E)
\end{array}
$$

(DLP) の許容解を考える



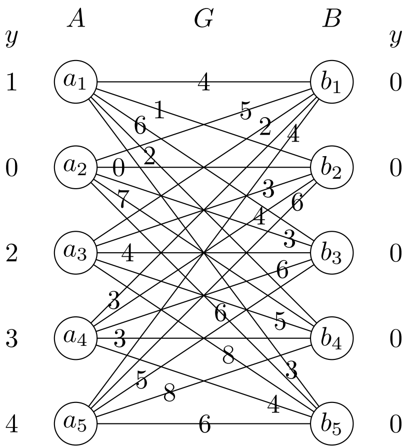
例えば，

- 任意の $b \in B$ に対して，$y_b = 0$ として

(DLP)

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{a \in A} y_a + \sum_{b \in B} y_b \\ \text{s.t.} \quad & y_a + y_b \leq c_{ab} \quad (\forall \{a, b\} \in E) \end{aligned}$$

(DLP) の許容解を考える



例えば,

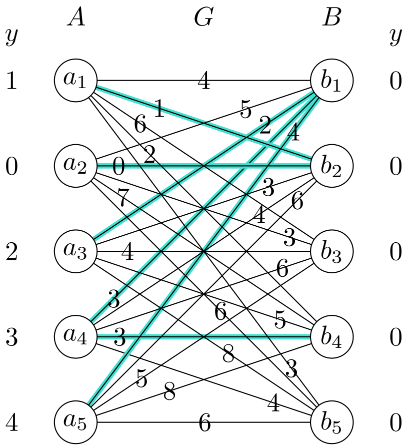
- 任意の $b \in B$ に対して, $y_b = 0$ として
- 任意の $a \in A$ に対して, $y_a = \min\{c_{ab} \mid \{a,b\} \in E\}$

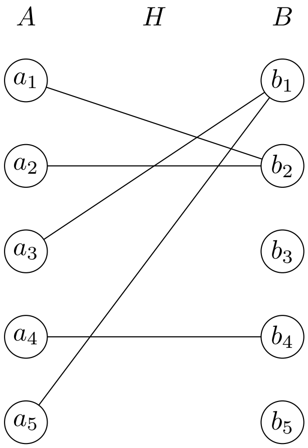
とする

(DLP)

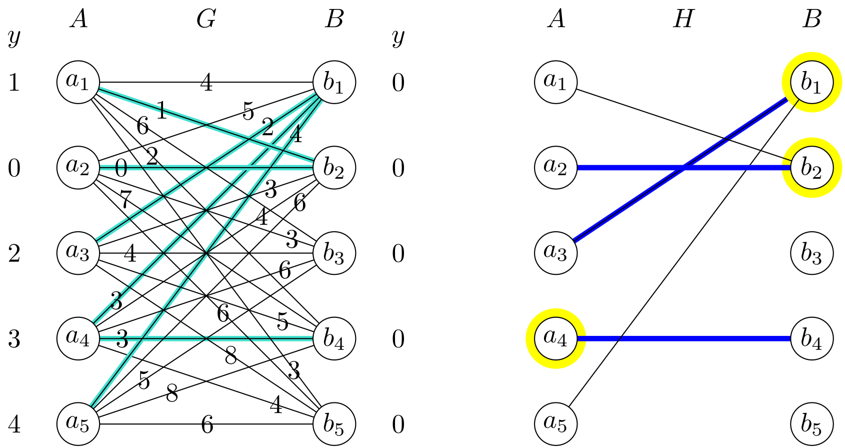
$$\begin{array}{ll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{a \in A} y_a + \sum_{b \in B} y_b \\ \text{s.t.} & y_a + y_b \le c_{ab} \quad (\forall\ \{a,b\} \in E) \end{array}$$

$y_a + y_b = c_{ab}$ を満たす辺 $\{a, b\} \in E$ だけでグラフ H を作る





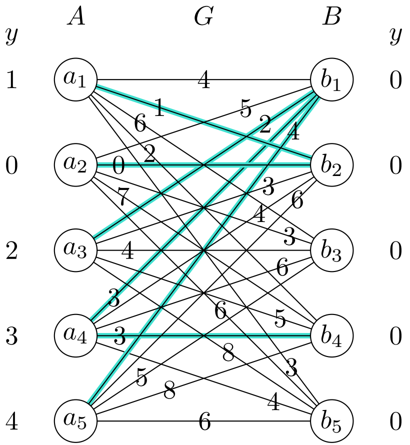
H の最大マッチング $\boxed{M}$ と最小頂点被覆 $\boxed{C}$ を見つける

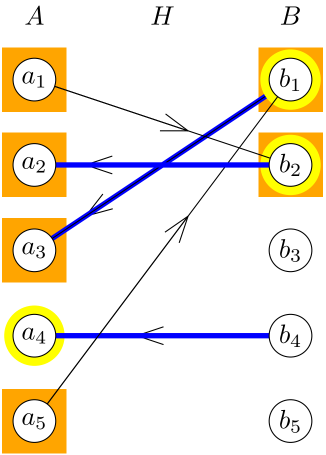


C の作り方は，第 3 回講義の方法に従う

主双対法：例 (4)

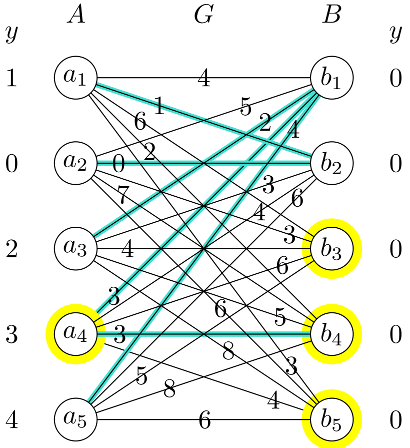
H の最大マッチング $\boxed{M}$ と最小頂点被覆 $\boxed{C}$ を見つける





C の作り方は，第 3 回講義の方法に従う

頂点 $v \in (A \cap C) \cup (B \setminus C)$ に対して，y_v の値を変更する



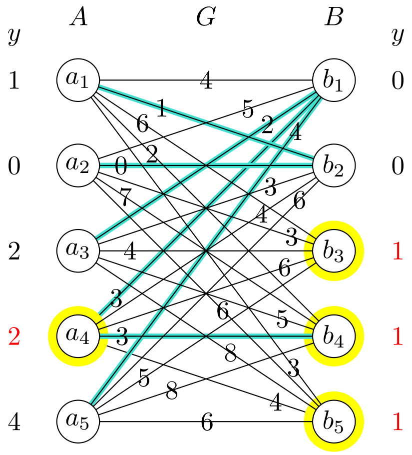
ある $\varepsilon > 0$ に対して

- $v \in A \cap C$ のとき，y_v を ε だけ減らす
- $v \in B \setminus C$ のとき，y_v を ε だけ増やす
- y が (DLP) の許容解であることは保つ

(DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{a \in A} y_a + \sum_{b \in B} y_b \\ \text{s.t.} & y_a + y_b \leq c_{ab} \quad (\forall \{a, b\} \in E) \end{array}$$

頂点 $v \in (A \cap C) \cup (B \setminus C)$ に対して，y_v の値を変更する



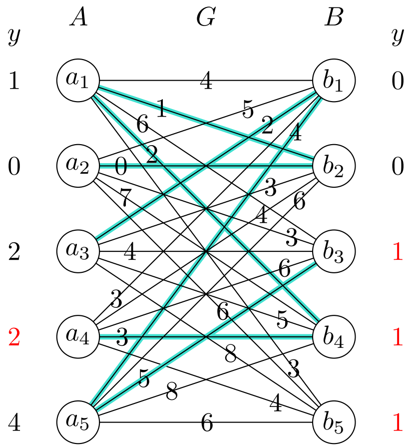
ある $\varepsilon > 0$ に対して

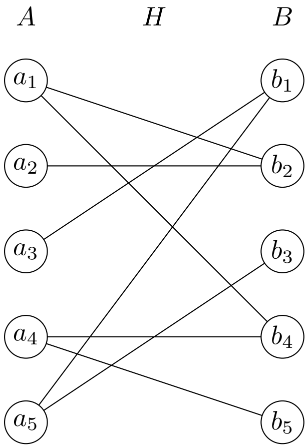
- $v \in A \cap C$ のとき，y_v を ε だけ減らす
- $v \in B \setminus C$ のとき，y_v を ε だけ増やす
- y が (DLP) の許容解であることは保つ

(DLP)

$$\begin{array}{lll} \text{max.} & \displaystyle\sum_{a\in A} y_a + \sum_{b\in B} y_b & \\ \text{s.t.} & y_a + y_b \leq c_{ab} & (\forall\ \{a,b\} \in E) \end{array}$$

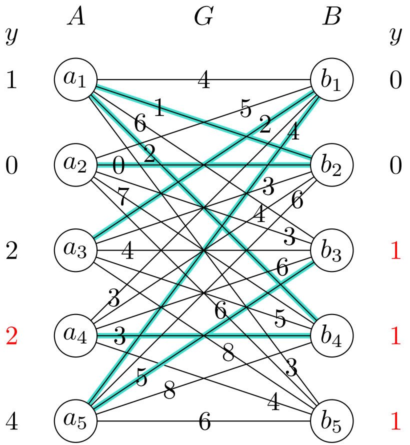
$y_a + y_b = c_{ab}$ を満たす辺 $\{a, b\} \in E$ だけでグラフ H を作る

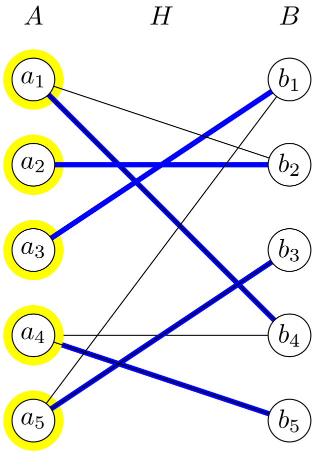




主双対法：例 (7)

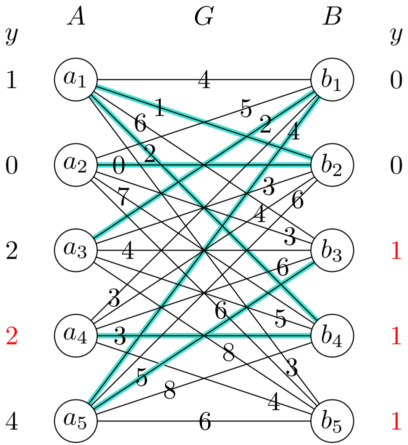
H の最大マッチング $\boxed{M}$ と最小頂点被覆 $\boxed{C}$ を見つける

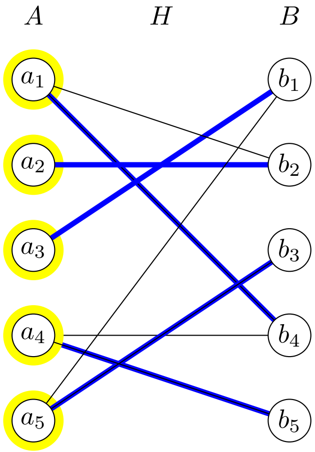




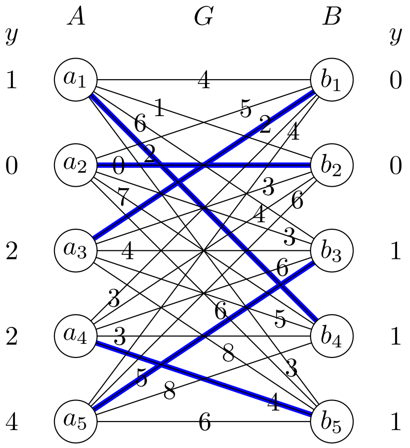
C の作り方は，第 3 回講義の方法に従う

M は完全マッチングである ⇒ 終了





この M が最小費用完全マッチングである



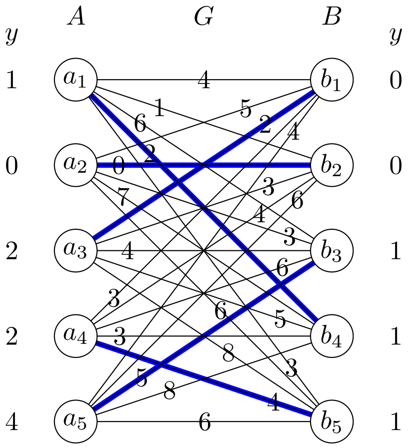
- 完全マッチング M から
次のベクトル x を作る

$$x_e = \begin{cases} 1 & (e \in M), \\ 0 & (e \notin M) \end{cases}$$

このとき，x は (IP) の許容解
(つまり，(LP) の許容解)

- y は (DLP) の許容解
(アルゴリズムの動作から)

この M が最小費用完全マッチングである



相補性条件も満たす

- $x_{ab} > 0$ のとき，
  $x_{ab} = 1$ であるので，
  $\{a, b\}$ は H の辺であり，
  すなわち，$y_a + y_b = c_{ab}$

したがって，x は (IP) の最適解

$\boxed{\text{相補性条件 (復習)}}$ ：$x_{ab} > 0$ ならば，$y_a + y_b = c_{ab}$ $\quad (\forall \{a, b\} \in E)$

目次

入力：完全二部グラフ $G = (A, B, E)$ ($|A| = |B|$)，辺費用 $c\colon E \to \mathbb{R}$
出力：G の最小費用完全マッチング $M \subseteq E$，(DLP) の最適解 $y \in \mathbb{R}^{A \cup B}$

主双対法

1. y を次のように初期化する

$$
\begin{aligned}
y_a &= \min\{c_{ab} \mid \{a,b\} \in E\} && (\forall\ a \in A),\\
y_b &= 0 && (\forall\ b \in B)
\end{aligned}
$$

2. 二部グラフ $H = (A, B, E')$ を次のように構成

$$
E' = \{\{a,b\} \in E \mid y_a + y_b = c_{ab}\}
$$

3. H の最大マッチング M を計算する　　(第 3 回講義を参照)
4. M が G の完全マッチングであれば，M を出力して終了

次のページに続く

主双対法 (続き)

5. M が完全マッチングではないとき，次のように y を更新

$$\varepsilon = \min\{c_{ab} - y_a - y_b \mid a \in A \setminus C, b \in B \setminus C\},$$

$$y_a = \begin{cases} y_a - \varepsilon & (a \in A \cap C \text{ のとき}), \\ y_a & (a \in A \setminus C \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\forall\ a \in A),$$

$$y_b = \begin{cases} y_b & (b \in B \cap C \text{ のとき}), \\ y_b + \varepsilon & (b \in B \setminus C \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\forall\ B \in B)$$

ただし，C は H の最小頂点被覆で，第 3 回講義の手順で求めたもの

6. ステップ 2 に戻る

二部グラフの最小費用完全マッチング問題に対する この主双対法は
ハンガリー法 (Hungarian method) とも呼ばれる

今から証明すること

1. アルゴリズムが必ず停止すること
   - 特に，多項式時間で停止すること
2. アルゴリズムの出力について，
   M が最小費用完全マッチングであり，
   y が (DLP) の最適解であること
   - 証明の基本的なアイディアは例で紹介したとおり

まずは，下の方 (最適性の証明) から行う

- その前に，y が (DLP) の許容解であることを証明する

主双対法：y の双対許容性

補題 A：y の双対許容性

主双対法の実行中，常に，y は (DLP) の許容解である

(DLP)

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{a\in A} y_a + \sum_{b\in B} y_b \\
\text{subject to} & y_a + y_b \leq c_{ab} \quad (\forall\ \{a,b\} \in E)
\end{array}
$$

証明の流れ

- y の初期化において，y は (DLP) の許容解
- y の更新において，y が (DLP) の許容解
  $\Rightarrow$ 更新後の y も (DLP) の許容解

主双対法：y の双対許容性 (証明：初期化)

(DLP) の許容性：$y_a + y_b \le c_{ab} \quad (\forall\ \{a,b\} \in E)$

主双対法における y の初期化

$$\begin{aligned} y_a &= \min\{c_{ab} \mid \{a,b\} \in E\} && (\forall\ a \in A), \\ y_b &= 0 && (\forall\ b \in B) \end{aligned}$$

任意の $\{a,b\} \in E$ に対して，初期化の直後では

$$\begin{aligned} y_a + y_b &= \min\{c_{ab'} \mid \{a,b'\} \in E\} \\ &\le c_{ab} \end{aligned}$$

したがって，初期化の直後において，y は (DLP) の許容解である

(DLP) の許容性：$y_a + y_b \leq c_{ab} \quad (\forall\ \{a,b\} \in E)$

主双対法における y の更新

$$\varepsilon = \min\{c_{ab} - y_a - y_b \mid a \in A \setminus C, b \in B \setminus C\},$$

$$y_a = \begin{cases} y_a - \varepsilon & (a \in A \cap C \text{ のとき}), \\ y_a & (a \in A \setminus C \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\forall\ a \in A),$$

$$y_b = \begin{cases} y_b & (b \in B \cap C \text{ のとき}), \\ y_b + \varepsilon & (b \in B \setminus C \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\forall\ B \in B)$$

y が (DLP) の許容解であるとき，
上の更新によって得られる y を y' と書くことにする

(DLP) の許容性：$y_a + y_b \leq c_{ab} \quad (\forall\ \{a, b\} \in E)$

主双対法における y の更新

$$\varepsilon = \min\{c_{a'b'} - y_{a'} - y_{b'} \mid a' \in A \setminus C, b' \in B \setminus C\} \geq 0,$$

$$y'_a = \begin{cases} y_a - \varepsilon & (a \in A \cap C\ \text{のとき}), \\ y_a & (a \in A \setminus C\ \text{のとき}) \end{cases} \quad (\forall\ a \in A),$$

$$y'_b = \begin{cases} y_b & (b \in B \cap C\ \text{のとき}), \\ y_b + \varepsilon & (b \in B \setminus C\ \text{のとき}) \end{cases} \quad (\forall\ B \in B)$$

4 つの場合分け

	$b \in B \cap C$	$b \in B \setminus C$
$a \in A \cap C$	1	2
$a \in A \setminus C$	3	4

主双対法：y の双対許容性 (証明：更新 (3))

1. $a \in A \cap C$, $b \in B \cap C$ のとき

$$y'_a + y'_b = (y_a - \varepsilon) + y_b \le y_a + y_b \le c_{ab}$$

主双対法における y の更新

$$\varepsilon = \min\{c_{a'b'} - y_{a'} - y_{b'} \mid a' \in A \setminus C, b' \in B \setminus C\},$$
$$y'_a = y_a - \varepsilon \quad (a \in A \cap C \text{ のとき}),$$
$$y'_b = y_b \quad (b \in B \cap C \text{ のとき})$$

2 $a \in A \cap C$, $b \in B \setminus C$ のとき

$$y'_a + y'_b = (y_a - \varepsilon) + (y_b + \varepsilon) = y_a + y_b \leq c_{ab}$$

主双対法における y の更新

$$\varepsilon = \min\{c_{a'b'} - y_{a'} - y_{b'} \mid a' \in A \setminus C, b' \in B \setminus C\},$$
$$y'_a = y_a - \varepsilon \quad (a \in A \cap C \text{ のとき}),$$
$$y'_b = y_b + \varepsilon \quad (b \in B \setminus C \text{ のとき})$$

3. $a \in A \setminus C$, $b \in B \cap C$ のとき

$$y'_a + y'_b = y_a + y_b \leq c_{ab}$$

主双対法における y の更新

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \min\{c_{a'b'} - y_{a'} - y_{b'} \mid a' \in A \setminus C, b' \in B \setminus C\}, \\
y'_a &= y_a \qquad (a \in A \setminus C \text{ のとき}), \\
y'_b &= y_b \qquad (b \in B \cap C \text{ のとき})
\end{aligned}$$

4 $a \in A \setminus C$, $b \in B \setminus C$ のとき

$$\begin{aligned} y'_a + y'_b &= y_a + (y_b + \varepsilon) \\ &= y_a + y_b + \min\{c_{a'b'} - y_{a'} - y_{b'} \mid a' \in A \setminus C, b' \in B \setminus C\} \\ &\leq y_a + y_b + (c_{ab} - y_a - y_b) \\ &= c_{ab} \end{aligned}$$

∴ すべての $a \in A, b \in B$ に対して，$y'_a + y'_b \leq c_{ab}$ が成り立つ □

主双対法における y の更新

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \min\{c_{a'b'} - y_{a'} - y_{b'} \mid a' \in A \setminus C, b' \in B \setminus C\}, \\ y'_a &= y_a \qquad (a \in A \setminus C \text{ のとき}), \\ y'_b &= y_b + \varepsilon \quad (b \in B \setminus C \text{ のとき}) \end{aligned}$$

今から証明すること

1. アルゴリズムが必ず停止すること
   - 特に，多項式時間で停止すること
2. アルゴリズムの出力について，
   M が最小費用完全マッチングであり，
   y が (DLP) の最適解であること
   - 証明の基本的なアイディアは例で紹介したとおり

まずは，下の方 (最適性の証明) から行う

- その前に，y が (DLP) の許容解であることを証明する　(済)

定理：主双対法の出力の最適性

主双対法が停止したとき，その出力 M と y について，
M は最小費用完全マッチングであり，y は (DLP) の最適解である

証明：完全マッチング M から次のベクトルを作る

$$x_e = \begin{cases} 1 & (e \in M), \\ 0 & (e \notin M) \end{cases}$$

最小費用完全マッチング問題は次の問題 (IP) として定式化される

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\ \text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\ & x_e \in \{0, 1\} & (\forall\ e \in E) \end{array}$$

$\therefore\ x$ は (IP) の許容解である

主双対法：最適性の証明 (2)

- (IP) の線形計画緩和 (LP) を考えると，x は (LP) の許容解でもある
- 補題 A より，y は (LP) の双対問題 (DLP) の許容解である
- $\therefore$ x が (LP) の最適解であり，y が (DLP) の最適解であるためには，次の相補性条件を満たせばよい

相補性条件

$x_{ab} > 0$ ならば，$y_a + y_b = c_{ab} \quad (\forall \{a,b\} \in E)$

主双対法：最適性の証明 (2)

- (IP) の線形計画緩和 (LP) を考えると，x は (LP) の許容解でもある
- 補題 A より，y は (LP) の双対問題 (DLP) の許容解である
- $\therefore x$ が (LP) の最適解であり，y が (DLP) の最適解であるためには，次の相補性条件を満たせばよい

相補性条件

$x_{ab} > 0$ ならば，$y_a + y_b = c_{ab} \quad (\forall \{a, b\} \in E)$

- x の構成法より，$x_{ab} \in \{0, 1\}$ なので，相補性条件は次のように書き換えられる

相補性条件 (書き換え)

$x_{ab} = 1$ ならば，$y_a + y_b = c_{ab} \quad (\forall \{a, b\} \in E)$

書き換えた相補性条件が成り立つことを証明する

相補性条件 (書き換え) 再掲

$x_{ab} = 1$ ならば，$y_a + y_b = c_{ab} \quad (\forall \{a,b\} \in E)$

$x_{ab} = 1$ であると仮定する

- つまり，$\{a,b\} \in M$ であり，特に，$\{a,b\}$ は H の辺である
- H の構成法 (主双対法のステップ 2) より，
  $y_a + y_b = c_{ab}$ が成り立つ

つまり，x は (LP) の最適解，y は (DLP) の最適解であり，
x は (IP) の許容解であるから，x は (IP) の最適解 □

主双対法

2 二部グラフ $H = (A, B, E')$ を次のように構成

$$E' = \{\{a,b\} \in E \mid y_a + y_b = c_{ab}\}$$

今から証明すること

1. アルゴリズムが必ず停止すること
   - 特に，多項式時間で停止すること
2. アルゴリズムの出力について，
   M が最小費用完全マッチングであり，
   y が (DLP) の最適解であること (済)
   - 証明の基本的なアイディアは例で紹介したとおり

まずは，下の方 (最適性の証明) から行う (済)

- その前に，y が (DLP) の許容解であることを証明する (済)

定理 (主双対法の計算量)

二部グラフの最小費用完全マッチング問題に対する主双対法は
多項式時間アルゴリズムである

証明のためにいくつか補題を用意する

- ステップ 5 において，必ず $\varepsilon > 0$
- ステップ 4 において，$|M|$ が増加するか，そうでないときは，$|B \cap C|$ が増加する

補題 B：ε が正であること

主双対法のステップ 5 において，必ず $\varepsilon > 0$ が成り立つ

主双対法

5 M が完全マッチングではないとき，次のように y を更新

$$\varepsilon = \min\{c_{ab} - y_a - y_b \mid a \in A \setminus C, b \in B \setminus C\}$$

ただし，C は H の ある頂点被覆

証明：$a \in A \setminus C, b \in B \setminus C$ であるとする

- C は H の頂点被覆であるので，$\{a, b\}$ は H の辺ではない
- $\therefore y_a + y_b < c_{ab}$ が成り立つ

したがって，$\varepsilon = \min\{c_{ab} - y_a - y_b \mid a \in A \setminus C, b \in B \setminus C\} > 0$ □

補題 B：ε が正であること

主双対法のステップ 5 において，必ず $\varepsilon > 0$ が成り立つ

主双対法

5 M が完全マッチングではないとき，次のように y を更新

$$\varepsilon = \min\{c_{ab} - y_a - y_b \mid a \in A \setminus C, b \in B \setminus C\}$$

ただし，C は H の ある頂点被覆

補足

特に，ある $a \in A \setminus C, b \in B \setminus C$ に対して，$\varepsilon = c_{ab} - y_a - y_b > 0$ となる

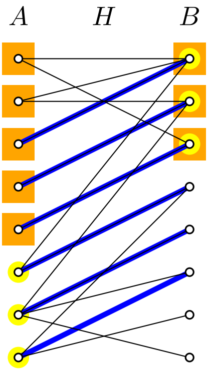
設定

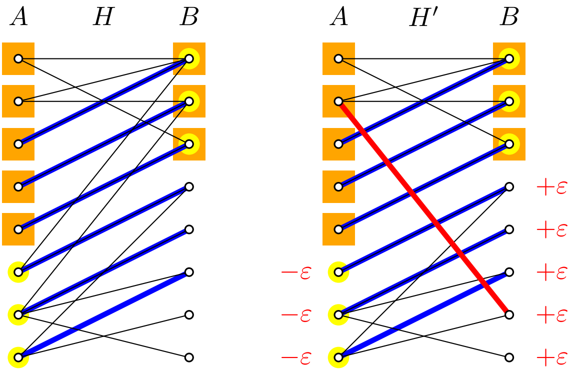
(DLP) の許容解	y				y'
構成したグラフ	H	$\rightarrow$	ステップ $\boxed{2}$ に	$\rightarrow$	H'
H の最大マッチング	M		戻って 反覆実行		M'
H の最小頂点被覆	C				C'

補題 C

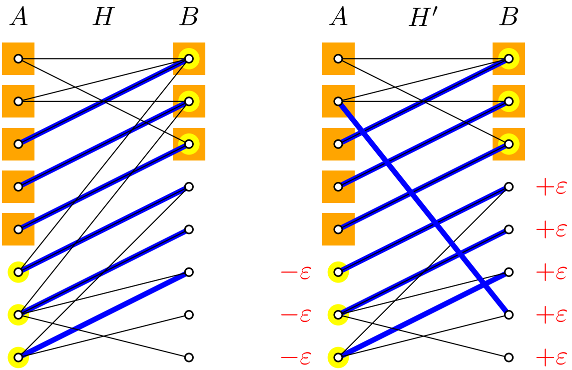
次のどちらかが成り立つ

- $|M| < |M'|$
- M' として M を選べ，かつ，$|B \cap C| < |B \cap C'|$

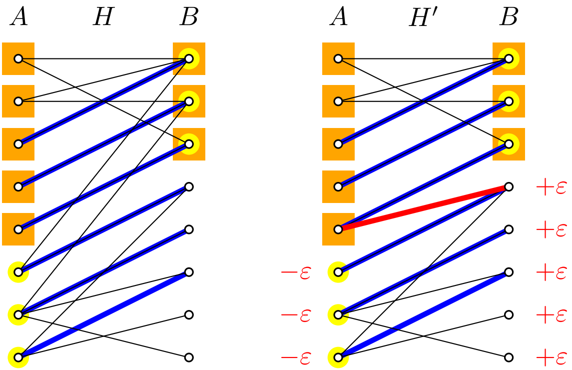

A
H
B


A
H
B
A
H'
B
$+\varepsilon$
$+\varepsilon$
$+\varepsilon$
$+\varepsilon$
$+\varepsilon$
$-\varepsilon$
$-\varepsilon$
$-\varepsilon$

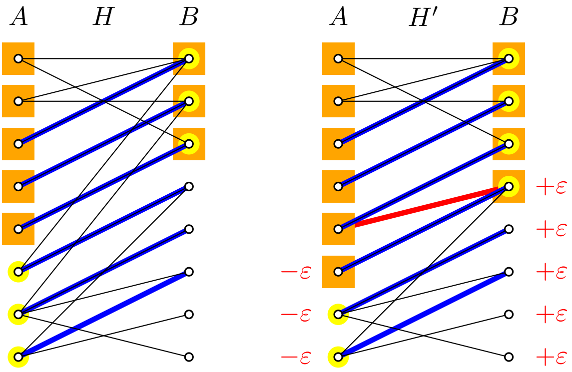
$|M| < |M'|$ となる場合


A
H
B
A
H'
B
$-\varepsilon$
$-\varepsilon$
$-\varepsilon$
$+\varepsilon$
$+\varepsilon$
$+\varepsilon$
$+\varepsilon$
$+\varepsilon$

$|M| < |M'|$ となる場合



M' として M を選べ，かつ，$|B \cap C| < |B \cap C'|$ となる場合



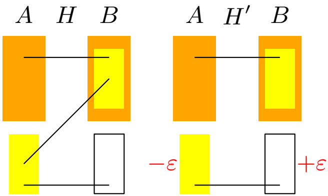
M' として M を選べ，かつ，$|B \cap C| < |B \cap C'|$ となる場合

証明：$a \in A$, $b \in B$ に関して場合分けを行う

- $a \in A \cap C$, $b \in B \cap C$ の場合

$$y'_a + y'_b = (y_a - \varepsilon) + y_b \le c_{ab} - \varepsilon < c_{ab}$$

すなわち，$\{a, b\}$ は H' の辺ではない



主双対法における y の更新

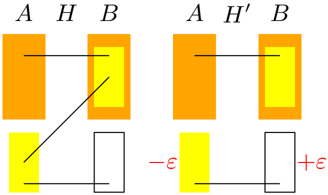
$$\varepsilon = \min\{c_{a'b'} - y_{a'} - y_{b'} \mid a' \in A \setminus C, b' \in B \setminus C\},$$
$$y'_a = y_a - \varepsilon \quad (a \in A \cap C \text{ のとき}),$$
$$y'_b = y_b \quad (b \in B \cap C \text{ のとき})$$

証明：$a \in A$, $b \in B$ に関して場合分けを行う

- $a \in A \cap C$, $b \in B \setminus C$ ではない場合

$$y'_a + y'_b = (y_a - \varepsilon) + (y_b + \varepsilon) = y_a + y_b$$

すなわち，
$\{a, b\}$ が H' の辺 $\Leftrightarrow$ $\{a, b\}$ が H の辺



主双対法における y の更新

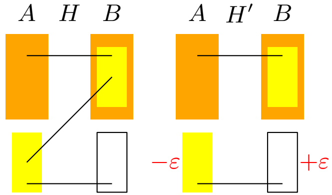
$$\varepsilon = \min\{c_{a'b'} - y_{a'} - y_{b'} \mid a' \in A \setminus C, b' \in B \setminus C\},$$
$$y'_a = y_a - \varepsilon \quad (a \in A \cap C \text{ のとき}),$$
$$y'_b = y_b + \varepsilon \quad (b \in B \setminus C \text{ のとき})$$

証明：$a \in A$, $b \in B$ に関して場合分けを行う

- $a \in A \setminus C$, $b \in B \cap C$ ではない場合

$$y'_a + y'_b = y_a + y_b$$

すなわち，
$\{a, b\}$ が H' の辺 $\Leftrightarrow$ $\{a, b\}$ が H の辺



主双対法における y の更新

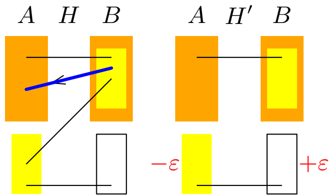
$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \min\{c_{a'b'} - y_{a'} - y_{b'} \mid a' \in A \setminus C, b' \in B \setminus C\}, \\
y'_a &= y_a \qquad (a \in A \setminus C \text{ のとき}), \\
y'_b &= y_b \qquad (b \in B \cap C \text{ のとき})
\end{aligned}$$

ここで

M の各辺 $e = \{a, b\}$ $(a \in A, b \in B)$ に対して，
$a \in A \setminus C$ か $b \in B \setminus C$ が成立

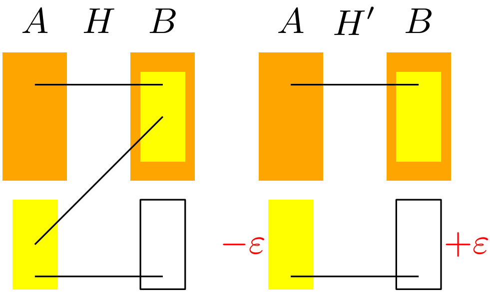
- なぜならば，$b \in B \cap C$ であるとすると，
  A において M が飽和しない頂点から b に到達可能
- そして，a も到達可能になるので，$a \in A \setminus C$

- $\therefore$ M の辺はどれも H' の辺であり，M は H' のマッチング
- $\therefore$ H' の最大マッチングの要素数 $\geq |M|$ $\qquad (\therefore |M'| \geq |M|)$

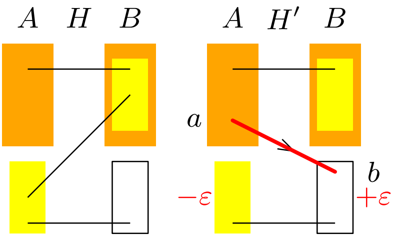


証明：$|M'| = |M|$ であると仮定

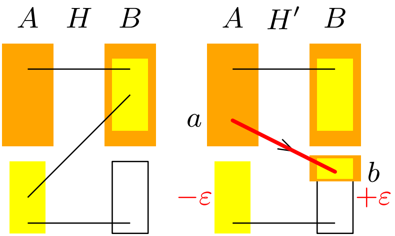
- M は H' のマッチングなので，$M' = M$ と選べる
- さらに，H において到達可能である頂点は H' においても到達可能 (なぜ？)



- 補題 B (の補足) より，
  ある $a \in A \setminus C, b \in B \setminus C$ に対して，$\{a, b\}$ は H' の辺
- $a \in A \setminus C$ なので，H において a は到達可能
- $\therefore H'$ において a は到達可能
- $\therefore H'$ において b は到達可能
- したがって，$|B \cap C'| \geq |B \cap C| + |\{b\}| > |B \cap C|$ □

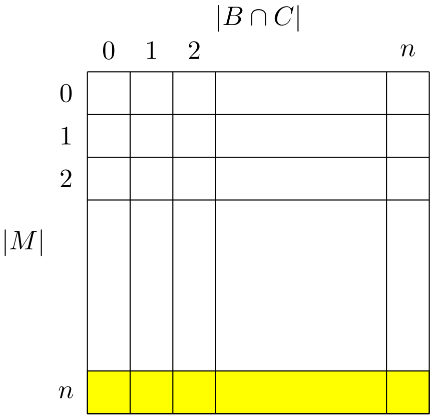


- 補題 B (の補足) より，
  ある $a \in A \setminus C, b \in B \setminus C$ に対して，$\{a, b\}$ は H' の辺
- $a \in A \setminus C$ なので，H において a は到達可能
- $\therefore H'$ において a は到達可能
- $\therefore H'$ において b は到達可能
- したがって，$|B \cap C'| \geq |B \cap C| + |\{b\}| > |B \cap C|$ $\square$



補題 C より

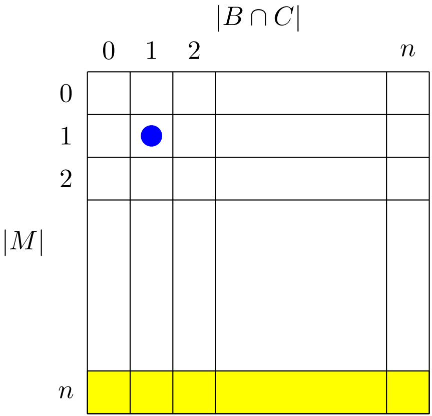
$n = |A| = |B|$



補題 C を用いて計算量を解析する

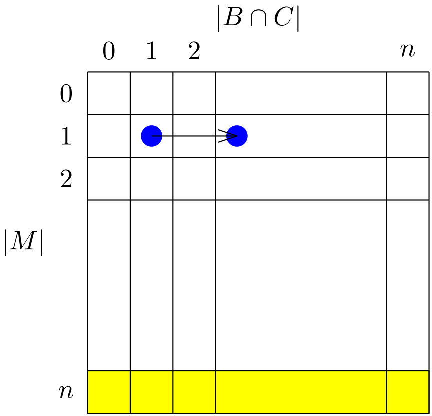
補題 C より

$n = |A| = |B|$



補題 C より

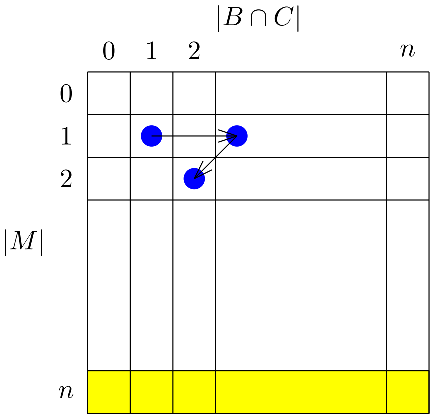
$$n = |A| = |B|$$



補題 C を用いて計算量を解析する

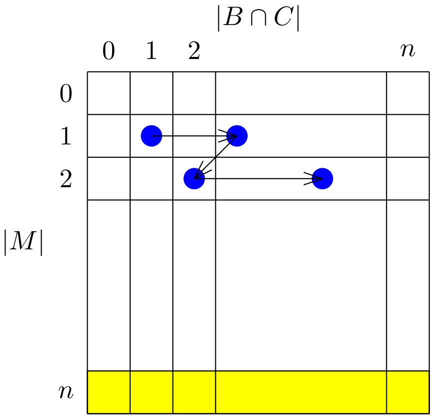
補題 C より

$n = |A| = |B|$



補題 C より

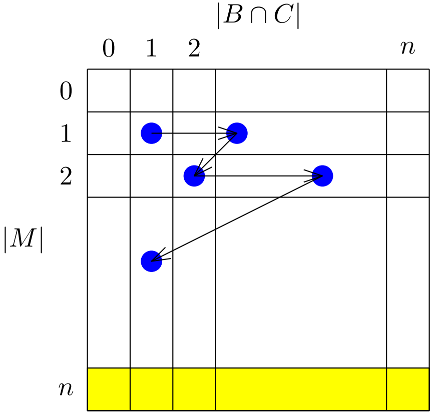
$n = |A| = |B|$



補題 C を用いて計算量を解析する

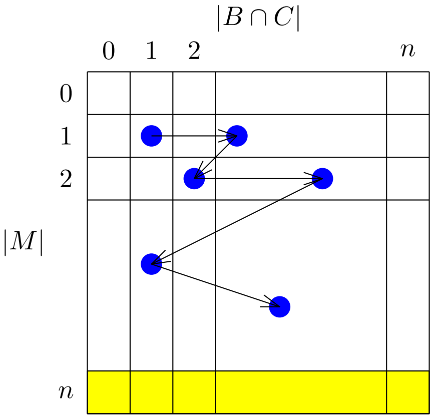
補題 C より

$$n = |A| = |B|$$



補題 C より

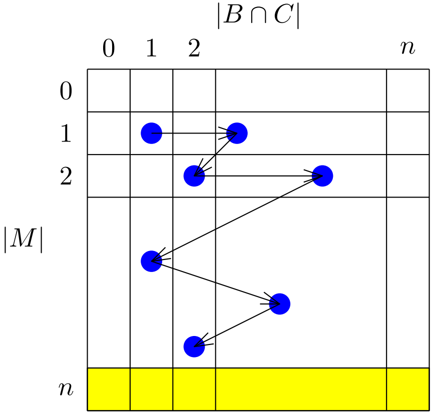
$n = |A| = |B|$



補題 C を用いて計算量を解析する

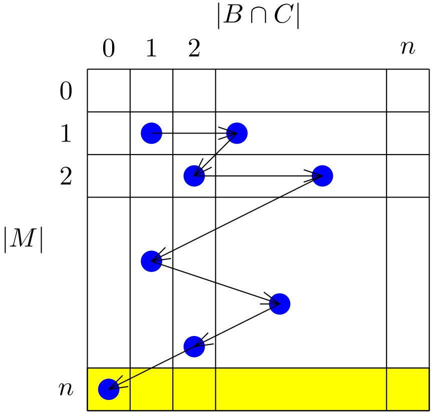
補題 C より

$n = |A| = |B|$



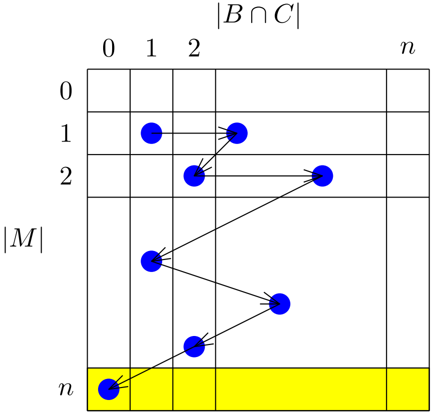
補題 C より

$n = |A| = |B|$



補題 C を用いて計算量を解析する

補題 C より $n = |A| = |B|$



- 高々 n^2 階の反復
- 右への移動 1 回 $= O(|E|)$ 時間，下への移動 1 段 $= O(|E|)$ 時間

$\rightsquigarrow$ 全体の計算量 $O(n^2|E|) = O(|E|^2) = O(|V|^4)$

主双対法：まとめ

二部グラフの最小費用完全マッチング問題に対する主双対法は

- $O(|V|^4)$ 時間で
- 最小費用完全マッチングを必ず見つける

主双対法：まとめ

二部グラフの最小費用完全マッチング問題に対する主双対法は

- $O(|V|^4)$ 時間で
- 最小費用完全マッチングを必ず見つける

主双対法から分かる 重要な性質 (完全双対整数性)

すべての辺 $e \in E$ に対して，費用 $c(e)$ が整数であるとき，
(DLP) の最適解 y として，各頂点 v に対して y_v が整数であるものが存在

なぜならば，ステップ 5 における ε が必ず整数であるから

目次

今日の目標

二部グラフの最小費用完全マッチング問題を解くための
アルゴリズムを設計する

- 主双対法

次回の予告

一般グラフの最小費用完全マッチング問題を解くための準備を行う

- 整数計画法による定式化と線形計画緩和
- 線形計画緩和の整数性

目次