離散最適化基礎論　第 8 回
二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 12 月 8 日

最終更新：2020 年 12 月 9 日　22:53

スケジュール 前半

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)

★ 祝日 のため 休み (11/3)

5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)

★ 調布祭片付け のため 休み (11/24)

7. 整数計画法の復習 (12/1)

8. 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
★ 国際会議 のため 休み (12/15)
9. 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10. 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11. 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14. 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

この講義が対象とする 4 つの問題

二部グラフの 最大マッチング問題	$\rightarrow$	二部グラフの 最小費用完全マッチング問題
$\downarrow$		$\downarrow$
一般グラフの 最大マッチング問題	$\rightarrow$	一般グラフの 最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

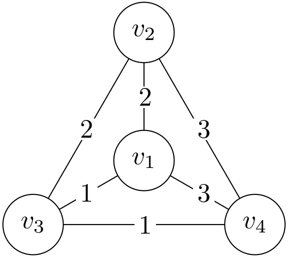
「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 $\rightsquigarrow$ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

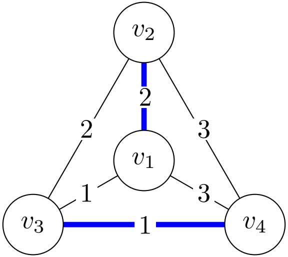
定義：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



定義：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c\colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



今日の目標

二部グラフの最小費用完全マッチング問題を
線形計画問題として解く

- 最小費用完全マッチング問題を整数計画問題として定式化する
- その線形計画緩和の性質を調べる

二部グラフの最大マッチングに対する双対定理を
線形計画法の視点からとらえ直す

- Kőnig–Egerváry の定理の別解釈を与える

目次

整数計画問題 (IP)

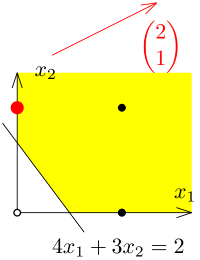
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

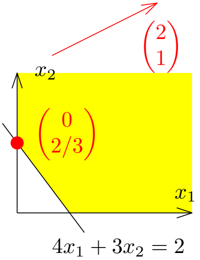
$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\
& x_1, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

線形計画緩和 (LP)

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$





整数計画問題は，
その許容領域の凸包を許容領域とする線形計画問題 と等価

整数計画問題 (IP)

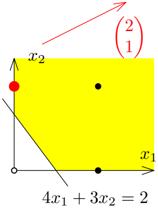
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

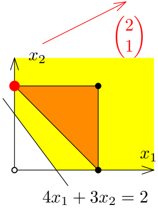
$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{array}$$

(IP) と等価な線形計画問題

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & x_1 \leq 1, \\ & x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \end{array}$$





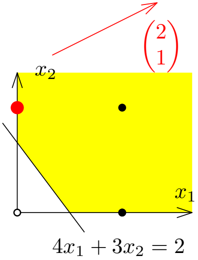
この手法の欠点と利点

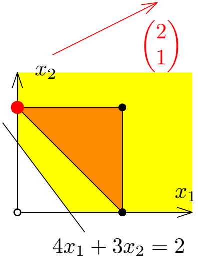
欠点

- (IP) の許容領域が分からないといけない
- (IP) の許容領域の凸包が分からないといけない

利点

- 上の欠点が克服できれば，(IP) を線形計画問題として解ける





$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

線形計画緩和 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

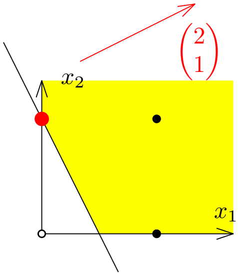
$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, x \geq 0 \end{aligned}$$

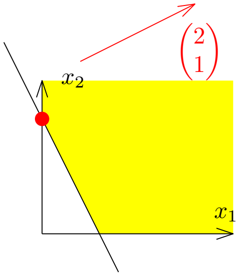
線形計画緩和の性質 (前回証明済)

1. (IP) の最適値 $\geq$ (LP) の最適値
2. (LP) の最適解 x_L^* が (IP) の許容解 $\Rightarrow$ x_L^* は (IP) の最適解

線形計画緩和の性質 (前回証明済)

1. (IP) の最適値 $\geq$ (LP) の最適値
2. (LP) の最適解 x_L^* が (IP) の許容解 $\Rightarrow$ x_L^* は (IP) の最適解





線形計画緩和の性質：帰結

整数計画問題 (IP)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^m \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

(DIP) の最適値 $\leq$ (DLP) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $\leq$ (IP) の最適値

目次

今から行うこと

最小費用完全マッチング問題を
整数計画問題として表現する (定式化する)

ポイント

「変数 x が 0 か 1 しか値として取らない」ことで「選択」を表現できる

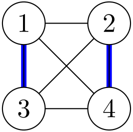
定義の復習：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)

無向グラフ $G=(V,E)$ の各辺 $e \in E$ に対して，
変数 $x_e \in \{0,1\}$ を用意する

変数 x_e の解釈

$$x_e = \begin{cases} 0 & (\text{辺 } e \text{ を完全マッチング } M \text{ の辺として選択しない}) \\ 1 & (\text{辺 } e \text{ を完全マッチング } M \text{ の辺として選択する}) \end{cases}$$



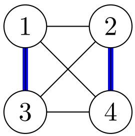
$$(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}) = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$$

「完全マッチングの辺は，各頂点にちょうど 1 つだけ接続している」ことを制約として記述する

制約

頂点 $v \in V$ に対して，$\delta(v)$ で v に接続する辺全体の集合を表すと

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \quad \forall\, v \in V$$



頂点 1 に対して $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$

頂点 2 に対して $x_{12} + x_{23} + x_{24} = 1$

頂点 3 に対して $x_{13} + x_{23} + x_{34} = 1$

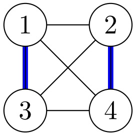
頂点 4 に対して $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$

目的は「選んだ辺の費用の和の最小化」

目的関数

辺 $e \in E$ の費用を c_e と書くと，目的は次のように書ける

$$\text{minimize} \quad \sum_{e \in E} c_e x_e$$



目的関数は

$$c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{14}x_{14} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{34}x_{34}$$

つまり，
最小費用完全マッチング問題は次の整数計画問題として定式化できる

(IP)

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\ v \in V), \\
& x_e \in \{0,1\} & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

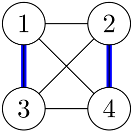
注：本来は「各辺 $e \in E$ に対して $x_e \geq 0$」という制約も書くとよいが冗長なので (書かなくても問題が変わらないので)，省いている

最小費用完全マッチング問題の定式化：行列とベクトルを使って書き直す (1)

行列 $A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ を次のように定義する

各 $v \in V, e \in E$ に対して $\quad a_{ve} = \begin{cases} 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点でない}), \\ 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \end{cases}$

この行列 A はグラフ G の**接続行列** (incidence matrix) と呼ばれる



$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

このとき，(IP) は次のように書き換えられる

(IP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = 1, \\ & x \in \{0,1\}^E \end{array}$$

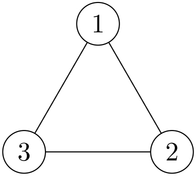
実際,「$Ax = 1$」の第 v 行 ($v \in V$) の左辺は

$$\sum_{e \in E} a_{ve} x_e = \sum_{\substack{e \in E, \\ v \text{ は } e \text{ の端点でない}}} 0 \cdot x_e + \sum_{\substack{e \in E, \\ v \text{ は } e \text{ の端点である}}} 1 \cdot x_e = \sum_{e \in \delta(v)} x_e$$

グラフ $G = (V, E)$ が完全マッチングを持たない $\Rightarrow$ (IP) の許容領域 $= \emptyset$

(IP)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\text{subject to} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 & (\forall\, v \in V), \\
& x_e \in \{0, 1\} & (\forall\, e \in E)
\end{aligned}
$$



- x が許容解であるならば，

$$x_{12} + x_{13} = 1, \quad x_{12} + x_{23} = 1, \quad x_{13} + x_{23} = 1$$

- これら 3 つの式を足すと，$2(x_{12} + x_{13} + x_{23}) = 3$
- x_{12}, x_{13}, x_{23} は整数だから，矛盾

目次

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ はグラフ $G = (V, E)$ の接続行列

整数計画問題 (IP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = 1, \\ & x \in \{0,1\}^E \end{aligned}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 1^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^V \end{aligned}$$

双対問題 (DLP)

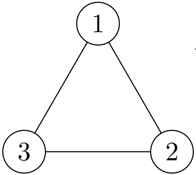
$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 1^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

(DIP) の最適値 $\leq$ (DLP) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $\leq$ (IP) の最適値

線形計画緩和 (LP)

$$
\begin{array}{llll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{e\in E} c_e x_e & & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x_e = 1 & & (\forall\ v \in V), \\
& x_e \geq 0 & & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

G が完全マッチングを持たなくても，
(LP) の許容領域が非空となることがある



次の $x = (x_{12}, x_{13}, x_{23})$ は (LP) の許容解

$$x_{12} = \frac{1}{2}, \quad x_{13} = \frac{1}{2}, \quad x_{23} = \frac{1}{2}$$

しかし，二部グラフであると，(LP) を解くことで，(IP) が解ける

定理 (Birkhoff '46)

$G = (V, E)$ が二部グラフ $\Rightarrow$
(LP) の最適解で，(IP) の許容解となるものが必ず存在する

線形計画緩和の性質 (前回証明済)：再掲

1. (IP) の最適値 $\geq$ (LP) の最適値
2. (LP) の最適解 x_L^* が (IP) の許容解 $\Rightarrow$ x_L^* は (IP) の最適解

しかし，二部グラフであると，(LP) を解くことで，(IP) が解ける

定理 (Birkhoff '46)

$G = (V, E)$ が二部グラフ $\Rightarrow$
(LP) の最適解で，(IP) の許容解となるものが必ず存在する

線形計画緩和の性質 (前回証明済)：再掲

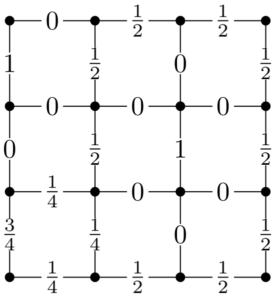
1. (IP) の最適値 $\geq$ (LP) の最適値
2. (LP) の最適解 x^*_L が (IP) の許容解 $\Rightarrow$ x^*_L は (IP) の最適解

証明の指針：(LP) の最適解 $x^* \in \mathbb{R}^E$ を 1 つ考える

- $x^* \in \{0,1\}^E$ ならば，これは (IP) の許容解
- そうでなければ，$E^\circ = \{e \in E \mid x^*_e \notin \{0,1\}\}$ とする
- E° が偶数長の閉路を含むことを観察する

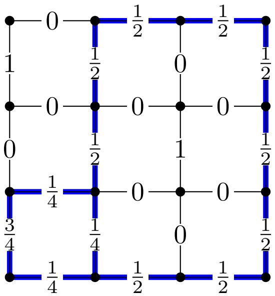
証明：(LP) の最適解 $x^* \in \mathbb{R}^E$ を 1 つ考える

- $E^\circ = \{e \in E \mid x^*_e \notin \{0,1\}\}$ とする
- $E^\circ = \emptyset$ なら，x^* は (IP) の許容解 (つまり，証明完了)
- $E^\circ \neq \emptyset$ とする
- (LP) の制約 $Ax^* = 1$ より，各頂点 $v \in V$ に対して，
  v に接続する E° の辺の数は 1 ではない (0 か，2 以上)
- $\therefore E^\circ$ は閉路を含み，G が二部グラフであるので，それは偶数長



証明：(LP) の最適解 $x^* \in \mathbb{R}^E$ を 1 つ考える

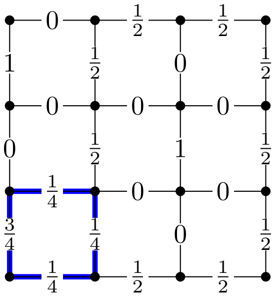
- $E^\circ = \{e \in E \mid x^*_e \notin \{0,1\}\}$ とする
- $E^\circ = \emptyset$ なら，x^* は (IP) の許容解　　(つまり，証明完了)
- $E^\circ \neq \emptyset$ とする
- (LP) の制約 $Ax^* = 1$ より，各頂点 $v \in V$ に対して，
  v に接続する E° の辺の数は 1 ではない (0 か，2 以上)
- $\therefore E^\circ$ は閉路を含み，G が二部グラフであるので，それは偶数長



E° に含まれる偶数長閉路の 1 つを C とする

- C の辺を交互に選んで，$\boxed{C_1}$，$\boxed{C_2}$ という辺集合を作る
- C_1, C_2 を使って，ベクトル $x', x'' \in \mathbb{R}^E$ を次のように作る

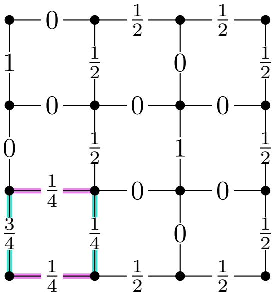
$$x'_e = \begin{cases} x^*_e & (e \notin C \text{ のとき}) \\ x^*_e + \varepsilon & (e \in C_1 \text{ のとき}) \\ x^*_e - \varepsilon & (e \in C_2 \text{ のとき}) \end{cases}, \quad x''_e = \begin{cases} x^*_e & (e \notin C \text{ のとき}) \\ x^*_e - \varepsilon & (e \in C_1 \text{ のとき}) \\ x^*_e + \varepsilon & (e \in C_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$



E° に含まれる偶数長閉路の 1 つを C とする

- C の辺を交互に選んで，$\boxed{C_1}$, $\boxed{C_2}$ という辺集合を作る
- C_1, C_2 を使って，ベクトル $x', x'' \in \mathbb{R}^E$ を次のように作る

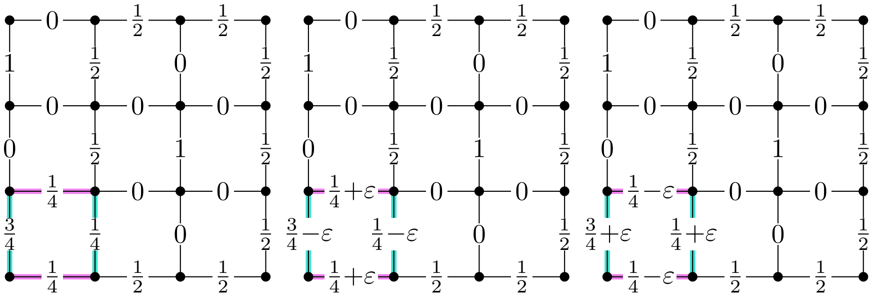
$$x'_e = \begin{cases} x^*_e & (e \notin C \text{ のとき}) \\ x^*_e + \varepsilon & (e \in C_1 \text{ のとき}) \\ x^*_e - \varepsilon & (e \in C_2 \text{ のとき}) \end{cases}, \quad x''_e = \begin{cases} x^*_e & (e \notin C \text{ のとき}) \\ x^*_e - \varepsilon & (e \in C_1 \text{ のとき}) \\ x^*_e + \varepsilon & (e \in C_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$



E° に含まれる偶数長閉路の 1 つを C とする

- C の辺を交互に選んで，$\boxed{C_1}$，$\boxed{C_2}$ という辺集合を作る
- C_1, C_2 を使って，ベクトル $x', x'' \in \mathbb{R}^E$ を次のように作る

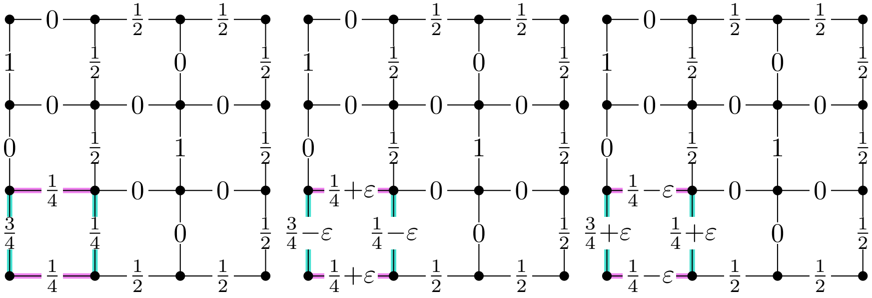
$$x'_e = \begin{cases} x^*_e & (e \notin C \text{ のとき}) \\ x^*_e + \varepsilon & (e \in C_1 \text{ のとき}) \\ x^*_e - \varepsilon & (e \in C_2 \text{ のとき}) \end{cases}, \quad x''_e = \begin{cases} x^*_e & (e \notin C \text{ のとき}) \\ x^*_e - \varepsilon & (e \in C_1 \text{ のとき}) \\ x^*_e + \varepsilon & (e \in C_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$



作られたベクトル $x', x'' \in \mathbb{R}^E$ は (LP) の許容解である

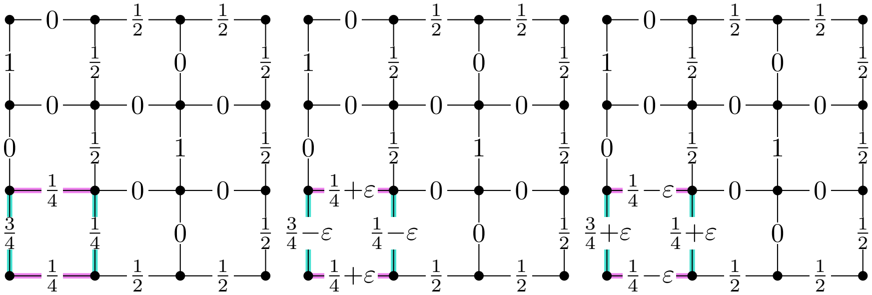
- また，$2c^\top x^* = c^\top x' + c^\top x''$ を満たす
- x^* は (LP) の最適解であるので，$c^\top x^* \leq c^\top x'$ かつ $c^\top x^* \leq c^\top x''$
- つまり，x' と x'' も (LP) の最適解

$$\because \qquad c^\top x' = 2c^\top x^* - c^\top x'' \leq 2c^\top x^* - c^\top x^* = c^\top x^*$$



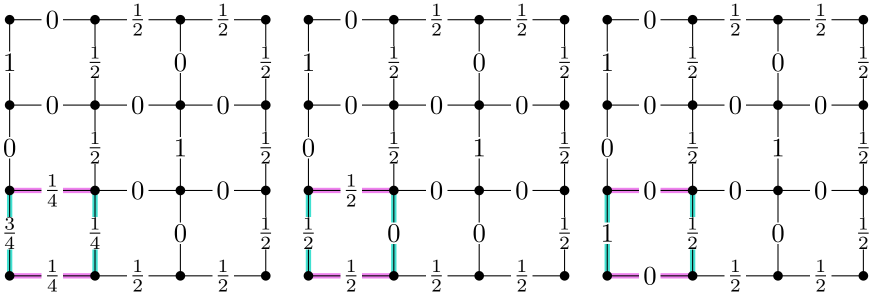
$x', x'' \in \mathbb{R}^E$ が (LP) の許容解であるまま，$\varepsilon > 0$ をできる限り大きくする

- すると，x' から作られる $E'^{\circ} = \{e \in E \mid x'_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数か
  x'' から作られる $E''^{\circ} = \{e \in E \mid x''_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数は
  E° の要素数よりも小さくなる
- 小さくなった方のベクトルに対して，同じ操作を繰り返す
- 最終的に，$E^{\circ} = \emptyset$ であるような最適解が得られる $\square$



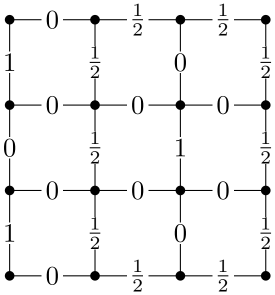
$x', x'' \in \mathbb{R}^E$ が (LP) の許容解であるまま，$\varepsilon > 0$ をできる限り大きくする

- すると，x' から作られる $E'^{\circ} = \{e \in E \mid x'_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数か
  x'' から作られる $E''^{\circ} = \{e \in E \mid x''_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数は
  E° の要素数よりも小さくなる
- 小さくなった方のベクトルに対して，同じ操作を繰り返す
- 最終的に，$E^{\circ} = \emptyset$ であるような最適解が得られる □



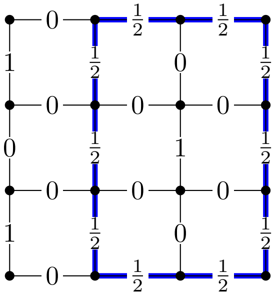
$x', x'' \in \mathbb{R}^E$ が (LP) の許容解であるまま，$\varepsilon > 0$ をできる限り大きくする

- すると，x' から作られる $E'^{\circ} = \{e \in E \mid x'_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数か
  x'' から作られる $E''^{\circ} = \{e \in E \mid x''_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数は
  E° の要素数よりも小さくなる
- 小さくなった方のベクトルに対して，同じ操作を繰り返す
- 最終的に，$E^{\circ} = \emptyset$ であるような最適解が得られる $\square$



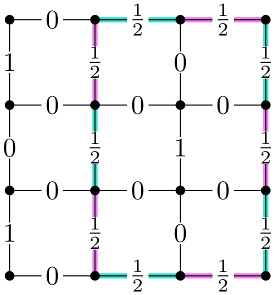
$x', x'' \in \mathbb{R}^E$ が (LP) の許容解であるまま，$\varepsilon > 0$ をできる限り大きくする

- すると，x' から作られる $E'^{\circ} = \{e \in E \mid x'_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数か
  x'' から作られる $E''^{\circ} = \{e \in E \mid x''_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数は
  E° の要素数よりも小さくなる
- 小さくなった方のベクトルに対して，同じ操作を繰り返す
- 最終的に，$E^{\circ} = \emptyset$ であるような最適解が得られる □



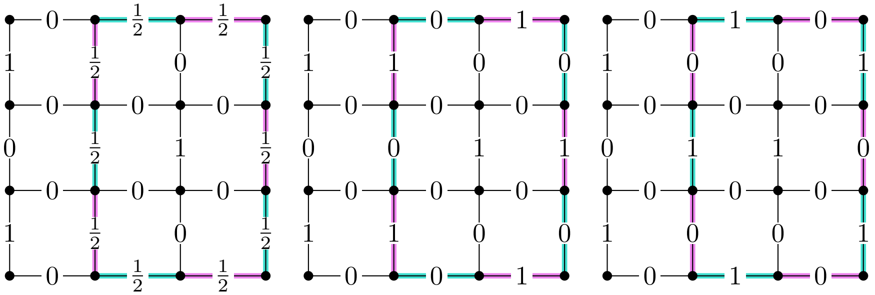
$x', x'' \in \mathbb{R}^E$ が (LP) の許容解であるまま，$\varepsilon > 0$ をできる限り大きくする

- すると，x' から作られる $E'^{\circ} = \{e \in E \mid x'_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数か
  x'' から作られる $E''^{\circ} = \{e \in E \mid x''_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数は
  E° の要素数よりも小さくなる
- 小さくなった方のベクトルに対して，同じ操作を繰り返す
- 最終的に，$E^{\circ} = \emptyset$ であるような最適解が得られる $\square$



$x', x'' \in \mathbb{R}^E$ が (LP) の許容解であるまま，$\varepsilon > 0$ をできる限り大きくする

- すると，x' から作られる $E'^{\circ} = \{e \in E \mid x'_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数か
  x'' から作られる $E''^{\circ} = \{e \in E \mid x''_e \notin \{0,1\}\}$ の要素数は
  E° の要素数よりも小さくなる
- 小さくなった方のベクトルに対して，同じ操作を繰り返す
- 最終的に，$E^{\circ} = \emptyset$ であるような最適解が得られる □



$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ は 二部グラフ $G = (V, E)$ の接続行列

整数計画問題 (IP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = 1, \\ & x \in \{0,1\}^E \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = 1, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^V \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

(DIP) の最適値 $\leq$ (DLP) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (IP) の最適値

- $\therefore$ (LP) を解けば，(IP) が解ける

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ は 二部グラフ $G = (V, E)$ の接続行列

整数計画問題 (IP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = 1, \\ & x \in \{0,1\}^E \end{aligned}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(DIP) の最適値 $\leq$ (DLP) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (IP) の最適値

次回の予告

- (LP) を使って，(IP) を解く多項式時間アルゴリズムを与える
  $\rightsquigarrow$ 主双対法 (primal-dual method)

目次

最小費用完全マッチング問題と同じように
最大マッチング問題も整数計画問題として定式化できる

(DIP')：最大マッチング問題の整数計画問題としての定式化

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in E} x_e & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 & (\forall\ v \in V), \\
 & x_e \in \{0, 1\} & (\forall\ e \in E)
\end{array}
$$

行列を使って書くと，$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ を G の接続行列として

(DIP')：行列とベクトルを使って書いたもの

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & 1^\top x \\
\text{subject to} & Ax \leq 1, \\
& x \in \{0,1\}^E
\end{array}
$$

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ はグラフ $G = (V, E)$ の接続行列

双対問題＋整数制約 (DIP')

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 1^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le 1, \\ & x \in \{0,1\}^E \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ はグラフ $G = (V, E)$ の接続行列

双対問題＋整数制約 (DIP')

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 1^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq 1, \\ & x \in \{0,1\}^E \end{aligned}$$

双対問題 (DLP')

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 1^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ はグラフ $G = (V, E)$ の接続行列

線形計画緩和 (LP')

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathbf{1}^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \geq \mathbf{1}, \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題＋整数制約 (DIP')

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{1}^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq \mathbf{1}, \\ & x \in \{0, 1\}^E \end{aligned}$$

双対問題 (DLP')

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \mathbf{1}^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq \mathbf{1}, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{V \times E}$ はグラフ $G = (V, E)$ の接続行列

整数計画問題 (IP')

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & 1^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \geq 1, \\ & y \in \{0,1\}^V \end{array}$$

線形計画緩和 (LP')

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & 1^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \geq 1, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP')

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & 1^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq 1, \\ & x \in \{0,1\}^E \end{array}$$

双対問題 (DLP')

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & 1^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq 1, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(DIP') の最適値 $\leq$ (DLP') の最適値 $=$ (LP') の最適値 $\leq$ (IP') の最適値

(IP') に対応するグラフの最適化問題は？ (1)

整数計画問題 (IP')

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimize} & 1^\top y \\
\text{subject to} & A^\top y \geq 1, \\
& y \in \{0,1\}^V
\end{array}
$$

制約 $A^\top y \geq 1$ の第 $e \in E$ 行の左辺は

$$
\begin{aligned}
\sum_{v \in V} a_{ve} y_v &= \sum_{\substack{v \in V \\ v\text{ が }e\text{ の端点でない}}} 0 \cdot y_v + \sum_{\substack{v \in V \\ v\text{ が }e\text{ の端点である}}} 1 \cdot y_v \\
&= \sum_{v\text{ が }e\text{ の端点である}} y_v
\end{aligned}
$$

整数計画問題 (IP')：行列とベクトルを使わずに書く

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{v\in V} x_v & \\
\text{subject to} & x_u + x_v \geq 1 & (\forall\ \{u,v\} \in E), \\
 & x_v \in \{0,1\} & (\forall\ v \in V)
\end{array}
$$

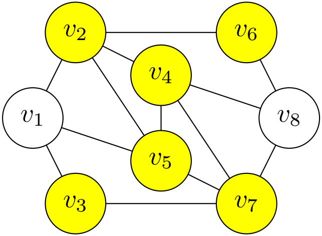
- 目的は,「選択する頂点の総数」の最小化
- 制約は,「各辺の端点のうち少なくとも一方は選択される」の意味

$\rightsquigarrow$ (IP') は最小頂点被覆問題の定式化！

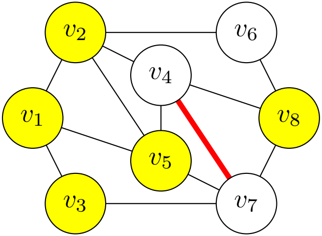
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：頂点被覆とは？ (復習)

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺も C のある頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である



$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

二部グラフ $G = (V, E)$

定理：Kőnig–Egerváry の定理 (復習)

G の最大マッチング M と最小頂点被覆 C に対して，$|M| = |C|$

つまり，
- 最大マッチングの要素数 $=$ (DIP') の最適値
- 最小頂点被覆の要素数 $=$ (IP') の最適値

したがって，

(DIP') の最適値 $=$ (DLP') の最適値 $=$ (LP') の最適値 $=$ (IP') の最適値

結論

Kőnig–Egerváry の定理は，線形計画法の双対定理として解釈できる

Kőnig–Egerváry の定理を線形計画法を用いて証明する方法もある

目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

二部グラフの最小費用完全マッチング問題を
線形計画問題として解く

- 最小費用完全マッチング問題を整数計画問題として定式化する
- その線形計画緩和の性質を調べる

二部グラフの最大マッチングに対する双対定理を
線形計画法の視点からとらえ直す

- Kőnig–Egerváry の定理の別解釈を与える

次回の予告

二部グラフの最小費用完全マッチング問題を解くアルゴリズムを与える

- 主双対法 (相補性定理を用いる)

目次