離散最適化基礎論　第 7 回
整数計画法の復習

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 12 月 1 日

最終更新：2020 年 12 月 4 日　22:30

スケジュール 前半 (予定)

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)

- ⋆ 祝日 のため 休み (11/3)

5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)

- ⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/24)

7. 整数計画法の復習 (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
★ 国際会議 のため 休み (12/15)
9 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

この講義が対象とする 4 つの問題

二部グラフの 最大マッチング問題	→	二部グラフの 最小費用完全マッチング問題
↓		↓
一般グラフの 最大マッチング問題	→	一般グラフの 最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 $\rightsquigarrow$ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

今日の目標

整数計画法における重要概念を復習する

- 緩和

線形計画法，整数計画法に関連する幾何学を復習する

- 凸包
- 凸多面体

目次

整数計画問題 $=$ 線形計画問題 $+$ 整数制約

整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\
& x_1 \in \{0, 1\}, x_2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

線形計画問題との違い

- 「各変数が 0 か 1 しか取らない」という制約がある

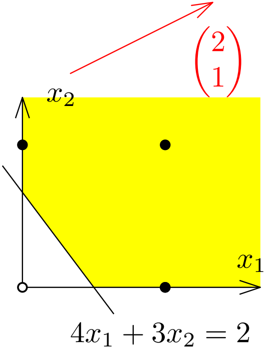
より正確には,「01 整数線形計画問題」と呼ばれる

図を描いてみる

整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\
\text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\
 & x_1, x_2 \geq 0, \\
 & x_1, x_2 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$



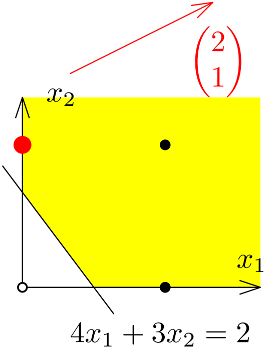
整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

図を描いてみる
そして解いてみる：

- $x_1 = 0, x_2 = 1$ は最適解
- 最適値は 1



整数計画問題 (integer program)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & c^\top x \\
\text{subject to} \quad & Ax = b, \\
& x \geq 0, \qquad \leftarrow \text{成分ごとに「}\geq\text{」} \\
& x \in \{0,1\}^n
\end{aligned}
$$

許容領域：$\{x \in \{0,1\}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$

目次

整数計画問題の線形計画緩和 (linear programming relaxation)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

(IP) の線形計画緩和：(LP) これは線形計画問題

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

(IP) から整数制約を取り除く $\rightsquigarrow$ (LP) が得られる

整数計画問題の線形計画緩和：図

整数計画問題 (IP)

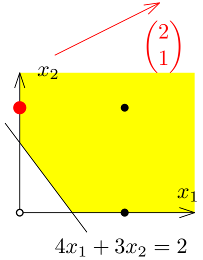
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

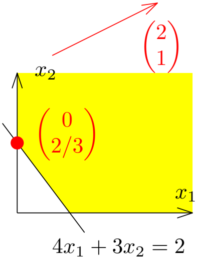
$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\
& x_1, x_2 \geq 0, \\
& x_1, x_2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

線形計画緩和 (LP)

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\
& x_1, x_2 \geq 0,
\end{aligned}
$$





$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

線形計画緩和の性質 1

(IP) の最適値 $\geq$ (LP) の最適値

証明：x_I^* を (IP) の最適解，x_L^* を (LP) の最適解とする

- (IP) の許容領域 $\subseteq$ (LP) の許容領域 なので，x_I^* は (LP) の許容解
- (LP) の最適解の定義から，$c^\top x_I^* \geq c^\top x_L^*$ □

線形計画緩和の性質 2：LP の最適解が IP の許容解ならば，それは IP の最適解

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^\top x \\ &\text{subject to} && Ax = b, x \geq 0, \\ &&& x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

線形計画緩和 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^\top x \\ &\text{subject to} && Ax = b, x \geq 0, \end{aligned}$$

線形計画緩和の性質 2

(LP) の最適解 x_L^* が (IP) の許容解 $\Rightarrow$ x_L^* は (IP) の最適解

証明：x_I^* を (IP) の最適解とする

- 性質 1 より，$c^\top x_I^* \geq c^\top x_L^*$
- x_L^* が (IP) の許容解なので，(IP) の最適値の定義より，$c^\top x_I^* \leq c^\top x_L^*$
- $\therefore c^\top x_I^* = c^\top x_L^*$ であり，x_L^* も (IP) の最適解 □

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

線形計画緩和の性質：帰結 (1)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

線形計画緩和 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, x \geq 0, \end{aligned}$$

双対問題 (DLP)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

線形計画緩和の性質：帰結 (1)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^m \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

整数計画問題 (IP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^m \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

(DIP) の最適値 $\leq$ (DLP) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $\leq$ (IP) の最適値

線形計画緩和の性質：帰結 (3)

整数計画問題 (IP)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^m \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

(LP) の最適解 (の１つ) が (IP) の許容解で，
(DLP) の最適解 (の１つ) が (DIP) の許容解であるとき，

(DIP) の最適値 $=$ (DLP) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $=$ (IP) の最適値

線形計画緩和の使い方

線形計画緩和の性質：帰結

(LP) の最適解 (の 1 つ) が (IP) の許容解で，
(DLP) の最適解 (の 1 つ) が (DIP) の許容解であるとき，

$$\text{(DIP) の最適値} = \text{(DLP) の最適値} = \text{(LP) の最適値} = \text{(IP) の最適値}$$

線形計画緩和の性質：帰結

(LP) の最適解 (の 1 つ) が (IP) の許容解で，
(DLP) の最適解 (の 1 つ) が (DIP) の許容解であるとき，

(DIP) の最適値 = (DLP) の最適値 = (LP) の最適値 = (IP) の最適値

線形計画緩和の使い方 (次回の予告)

二部グラフに対して，重みが整数であるとき

- 最小重み完全マッチング問題を (IP) として記述する
- (LP) の最適値 = (IP) の最適値 となることを証明する
- ∴ (LP) を解けば，最小重み完全マッチング問題が解ける

- (LP) を解くときに，(DLP) を利用する
- その解き方から，同時に (DIP) も解けることが分かる

目次

今から行うこと

線形計画問題と整数計画問題を探究するためには,
幾何学的な直感や概念を活用することが重要

線形計画問題と整数計画問題に関連する幾何学的概念

- 凸多面体
- 凸包

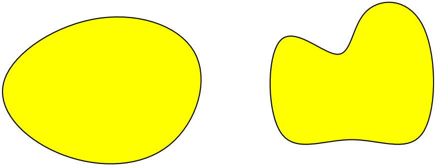
今から行うことは，これらの紹介

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：凸集合

S が凸集合 (convex set) であるとは，次を満たすこと

任意の $p, q \in S$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して，$\lambda p + (1-\lambda) q \in S$



凸集合である　　凸集合ではない

注：凸集合ではない集合を 凹集合とは呼ばない

凸集合の例

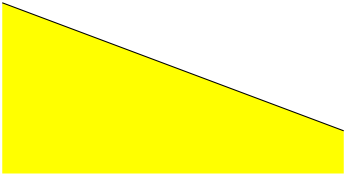
閉半空間 (closed halfspace) は凸集合

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \leq b\}$$

ただし，$a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$

$\because$ 任意の $p, q \in S$ と任意の $\lambda \in [0, 1]$ に対して

$$a^\top(\lambda p + (1-\lambda)q) = \lambda a^\top p + (1-\lambda)a^\top q \leq \lambda b + (1-\lambda)b = b$$



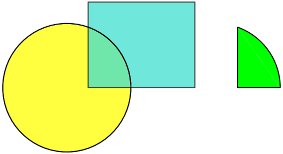
凸集合の重要な性質

$S, T \subseteq \mathbb{R}^n$

凸集合の重要な性質

S と T が凸集合 $\Rightarrow$ $S \cap T$ も凸集合

証明は難しくない

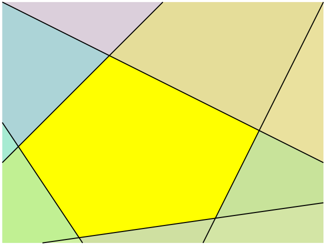


定義：凸多面体

凸多面体 (convex polyhedron) とは，有限個の閉半空間の共通部分

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ (この場合，m 個の閉半空間の共通部分)



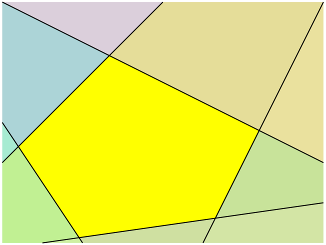
注：凸多面体は空かもしれないし，非有界かもしれない

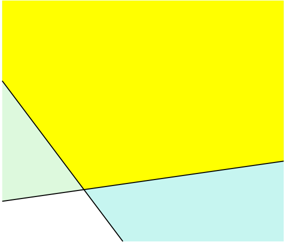
定義：凸多面体

凸多面体 (convex polyhedron) とは，有限個の閉半空間の共通部分

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ (この場合，m 個の閉半空間の共通部分)





注：凸多面体は空かもしれないし，非有界かもしれない

定義：凸多面体

凸多面体 (convex polyhedron) とは，有限個の閉半空間の共通部分

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ (この場合，m 個の閉半空間の共通部分)

性質

凸多面体は凸集合

証明：

- 閉半空間は凸集合で，凸集合の共通部分は凸集合
- 凸多面体は閉半空間の共通部分だから，凸集合 □

線形計画問題 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{(LP) の許容領域} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, -Ax \leq -b, -x \leq 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

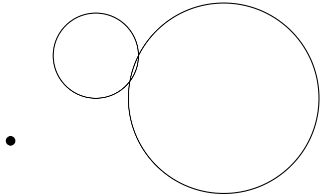
$\therefore$ (LP) の許容領域は凸多面体である

$S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：凸包

S の凸包 (convex hull) とは，S を含む最小の凸集合

$$\mathrm{conv}(S) = \bigcap_{T \supseteq S,\ T \text{ は凸}} T$$



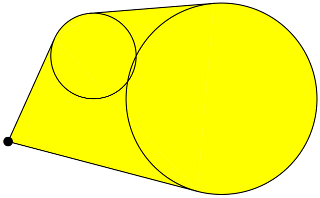
凸包の定義と凸集合の性質より，凸包は凸集合

$S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：凸包

S の凸包 (convex hull) とは，S を含む最小の凸集合

$$\mathrm{conv}(S) = \bigcap_{T \supseteq S,\ T\ \text{は凸}} T$$

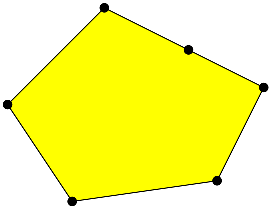


凸包の定義と凸集合の性質より，凸包は凸集合

$S \subseteq \mathbb{R}^n$

定理 (証明は省略)

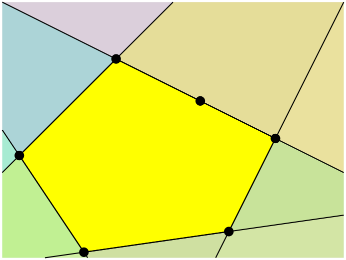
S が有限集合 $\Rightarrow \mathrm{conv}(S)$ は有界な凸多面体



$S \subseteq \mathbb{R}^n$

定理 (証明は省略)

S が有限集合 $\Rightarrow$ $\mathrm{conv}(S)$ は有界な凸多面体

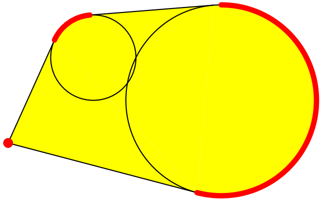


凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：端点

凸集合 S の端点 (extreme point) とは，次を満たす $x \in S$ のこと

$$\text{任意の } x', x'' \in S \text{ に対して，} x = \frac{x' + x''}{2} \Rightarrow x = x' = x''$$

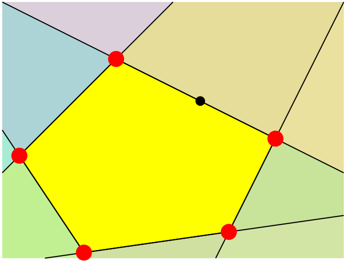


凸多面体 $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_i^\top x \le b_i \ \forall i \in \{1,\dots,m\}\}$ $(a_i\in\mathbb{R}^n, b_i\in\mathbb{R})$

性質；凸多面体の端点と連立方程式

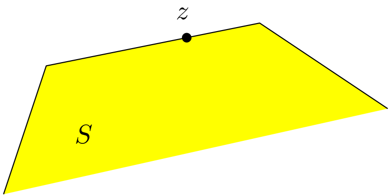
$z\in\mathbb{R}^n$ が S の端点 $\Rightarrow$

$$n \text{ 個の添え字 } i \text{ に対して，} a_i^\top z = b_i$$



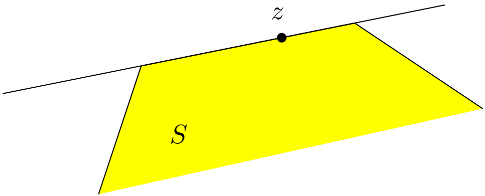
証明：$z \in \mathbb{R}^n$ が S の端点であると仮定する

- $a_i^\top z = b_i$ を満たす添え字 i 全体の集合を I とする．つまり，
  - 任意の $i \in I$ に対して，$a_i^\top z = b_i$
  - 任意の $i \notin I$ に対して，$a_i^\top z < b_i$
- 背理法：$|I| < n$ とする
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = 0 \ \forall i \in I\}$ とすると，A の次元は 1 以上
- したがって，0 ではない $x \in A$ が存在する



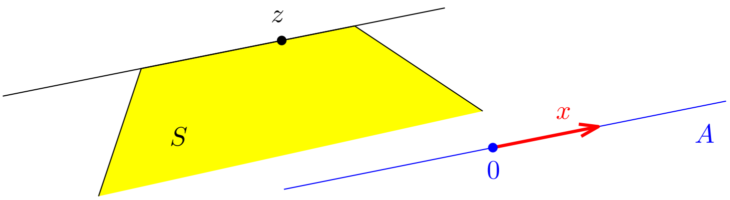
証明：$z \in \mathbb{R}^n$ が S の端点であると仮定する

- $a_i^\top z = b_i$ を満たす添え字 i 全体の集合を I とする．つまり，
  - 任意の $i \in I$ に対して，$a_i^\top z = b_i$
  - 任意の $i \notin I$ に対して，$a_i^\top z < b_i$
- 背理法：$|I| < n$ とする
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = 0 \ \forall i \in I\}$ とすると，A の次元は 1 以上
- したがって，0 ではない $x \in A$ が存在する

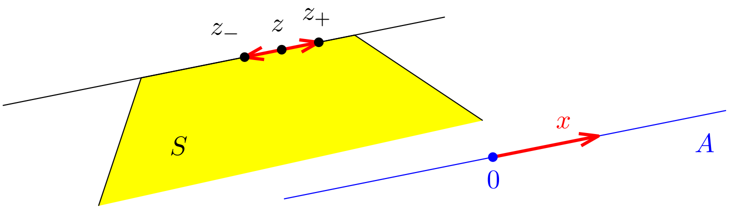


証明：$z \in \mathbb{R}^n$ が S の端点であると仮定する

- $a_i^\top z = b_i$ を満たす添え字 i 全体の集合を I とする．つまり，
  - 任意の $i \in I$ に対して，$a_i^\top z = b_i$
  - 任意の $i \notin I$ に対して，$a_i^\top z < b_i$
- 背理法：$|I| < n$ とする
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = 0 \ \forall i \in I\}$ とすると，A の次元は 1 以上
- したがって，0 ではない $x \in A$ が存在する



- 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して，$z_+ = z + \varepsilon x, z_- = z - \varepsilon x$ とすると
  - 任意の $i \in I$ に対して，$a_i^\top z_\pm = a_i^\top z \pm \varepsilon a_i^\top x = b_i$
  - 任意の $i \notin I$ に対して，$a_i^\top z_\pm = a_i^\top z \pm \varepsilon a_i^\top x < b_i$
- したがって，$z_\pm \in S$
- 一方で，$z = (z_+ + z_-)/2$ であるので，z は S の端点ではない (矛盾)
- $\therefore |I| \geq n$ $\square$



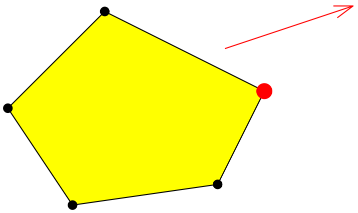
凸多面体 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

性質：凸多面体の端点と線形計画問題

$z \in \mathbb{R}^n$ が S の端点 $\Rightarrow$
ある $c \in \mathbb{R}^n$ が存在し，z は次の線形計画問題の最適解

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

証明は省略



目次

今日のまとめ

整数計画法における重要概念を復習する

- 緩和

線形計画法，整数計画法に関連する幾何学を復習する

- 凸包
- 凸多面体

次回の予告

二部グラフの最小費用完全マッチング問題に対して，
線形計画法と整数計画法の考え方を適用する

目次