# 離散最適化基礎論　第 6 回
# 線形計画法の復習

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 11 月 17 日

最終更新：2020 年 11 月 19 日　14:31

# スケジュール 前半 (予定)

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)

★ 祝日 のため 休み (11/3)

5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)

★ 調布祭片付け のため 休み (11/24)

7. 整数計画法の復習 (12/1)

注意：予定の変更もありうる

# スケジュール 後半 (予定)

8. 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
★ 国際会議 のため 休み (12/15)
9. 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10. 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11. 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14. 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

# この講義が対象とする 4 つの問題

| | | |
|---|---|---|
| 二部グラフの<br>最大マッチング問題 | → | 二部グラフの<br>最小費用完全マッチング問題 |
| ↓ | | ↓ |
| 一般グラフの<br>最大マッチング問題 | → | 一般グラフの<br>最小費用完全マッチング問題 |

## この講義で行うこと

「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

## 重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 $\rightsquigarrow$ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

## 今日の目標

線形計画法における重要概念を復習する

- 線形計画法の双対定理
- 線形計画法の相補性定理

# 目次

## 線形計画問題の例

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\
& 2x_1 + x_3 = 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

読み方

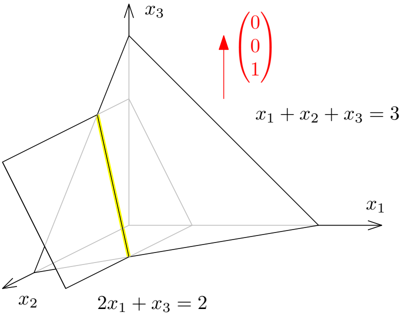
- 「minimize」の後に書いてある関数を最小化する
- 「subject to」の後に書いてある式を満たす $x_1, x_2, x_3$ の中で

図を描いてみる

### 線形計画問題の例

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_3 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & 2x_1 + x_3 = 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$



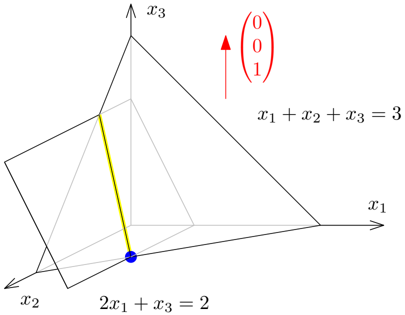
**線形計画問題の例**

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\
& 2x_1 + x_3 = 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

図を描いてみる
そして解いてみる：

- $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$ は最適解
- 最適値は 0



## 線形計画問題の例

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\
& 2x_1 + x_3 = 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- 目的関数 (objective function)：最小化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

## 線形計画問題の例

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_3 \leftarrow \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\
& 2x_1 + x_3 = 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- 目的関数 (objective function)：最小化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

## 線形計画問題の例

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimize} & x_3 \\
\text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \ \leftarrow \\
& 2x_1 + x_3 = 2, \ \leftarrow \\
& x_1 \geq 0, \ \leftarrow \\
& x_2 \geq 0, \ \leftarrow \\
& x_3 \geq 0 \leftarrow
\end{array}
$$

- 目的関数 (objective function)：最小化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

## 線形計画問題の例

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\
& 2x_1 + x_3 = 2, \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_2 \geq 0, \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- 目的関数 (objective function)：最小化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

## 線形計画問題 (linear program)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{rll} \text{minimize} & c^\top x & \\ \text{subject to} & Ax = b, & \\ & x \geq 0 & \leftarrow \text{成分ごとに「}\geq\text{」} \end{array}$$

先ほどの例：

- $m = 2$, $n = 3$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 先ほどの例を行列とベクトルで書いてみる

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
\text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\text{許容領域} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_3 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}
$$

## 線形計画問題：別の表現

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \le b \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}\le\text{」} \end{array}$$

制約は次の形であればよい

- 線形の等式
- 線形の (等号付き) 不等式

目的は次の形であればよい

- 線形関数の最大化
- 線形関数の最小化

はじめに挙げた例は，標準形の線形計画問題である

**標準形の線形計画問題 (linear program in standard form)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimize} & c^\top x \\
\text{subject to} & Ax = b, \\
 & x \geq 0 \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}\geq\text{」}
\end{array}
$$

$\boxed{\text{注}}$：

- 論文や教科書によっては，別のものを標準形と呼ぶことがある

## 線形計画問題 (P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

## (P) の最適解と最適値とは？

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 (optimal solution) であるとは

(P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$c^\top x^* \geq c^\top x$

このとき，$c^\top x^*$ を (P) の最適値 (optimal value) と呼ぶ

注：「最適解」と「最適値」は明確に異なる概念

# 目次

# 線形計画問題の双対問題

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**線形計画問題：(P)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**(P) の双対問題：(D)** これも線形計画問題

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

双対問題の「意味」は講義『数理計画法』を参照

# 線形計画問題の双対問題：例

## 線形計画問題 (P)

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\
& 2x_1 + x_3 = 2, \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

## (P) の双対問題 (D)

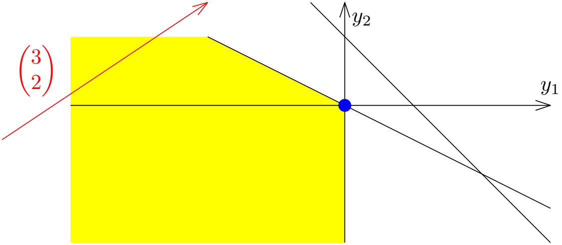
$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 3y_1 + 2y_2 \\
\text{subject to} \quad & y_1 + 2y_2 \leq 0, \\
& y_1 \leq 0, \\
& y_1 + y_2 \leq 1
\end{aligned}
$$

## (P) の双対問題 (D)

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & 3y_1 + 2y_2 \\ \text{subject to} & y_1 + 2y_2 \leq 0, \\ & y_1 \leq 0, \\ & y_1 + y_2 \leq 1 \end{array}$$




- 最適解は $y_1 = 0, y_2 = 0$
- 最適値は $0$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

**双対問題：(D)**

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**双対問題：(D)**

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

**線形計画法の弱双対定理**

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$\Rightarrow b^\top y \leq c^\top x$

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax = b$ かつ ........................................ (1)
- $x \geq 0$ ............................................. (2)

## 線形計画法の弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax = b$ かつ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (1)
- $x \geq 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (2)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y \leq c$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (3)

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax = b$ かつ ........................................ (1)
- $x \geq 0$ ................................................ (2)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y \leq c$ ........................................... (3)

したがって，

$$b^\top y$$

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると,

- $Ax = b$ かつ ........................................ (1)
- $x \geq 0$ ................................................ (2)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると,

- $A^\top y \leq c$ .............................................. (3)

したがって,

$$b^\top y \overset{(1)}{=} (Ax)^\top y$$

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax = b$ かつ ........................................ (1)
- $x \geq 0$ ........................................ (2)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y \leq c$ ........................................ (3)

したがって，

$$b^\top y \overset{(1)}{=} (Ax)^\top y = (x^\top A^\top) y$$

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax = b$ かつ ..................................... (1)
- $x \geq 0$ ............................................... (2)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y \leq c$ ......................................... (3)

したがって，

$$b^\top y \overset{(1)}{=} (Ax)^\top y = (x^\top A^\top) y = x^\top (A^\top y)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax = b$ かつ ........................................ (1)
- $x \geq 0$ ........................................ (2)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y \leq c$ ........................................ (3)

したがって，

$$b^\top y \overset{(1)}{=} (Ax)^\top y = (x^\top A^\top)y = x^\top (A^\top y) \overset{(2),(3)}{\leq} x^\top c$$

**注意**

$s \in \mathbb{R}^k$ と $t \in \mathbb{R}^k$ に対して

$$s \geq 0 \text{ かつ } t \leq 0 \quad \Rightarrow \quad s^\top t \leq 0$$

## 線形計画法の弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，

- $Ax = b$ かつ ........................................ (1)
- $x \geq 0$ ........................................ (2)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，

- $A^\top y \leq c$ ........................................ (3)

したがって，

$$b^\top y \stackrel{(1)}{=} (Ax)^\top y = (x^\top A^\top) y = x^\top (A^\top y) \stackrel{(2),(3)}{\leq} x^\top c = c^\top x \qquad \square$$

**注意**

$s \in \mathbb{R}^k$ と $t \in \mathbb{R}^k$ に対して

$$s \geq 0 \text{ かつ } t \leq 0 \quad \Rightarrow \quad s^\top t \leq 0$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**双対問題：(D)**

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

**双対問題：(D)**

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

**弱双対定理の系**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
$x^*$ は (P) の最適解
$y^*$ は (D) の最適解

系 (corollary)：定理から直ちに導かれる帰結

**弱双対定理の系**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow$ $x^*$ は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$ $\quad$ $y^*$ は (D) の最適解

証明 (前半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

**(P) の最適解とは？ (定義再掲)**

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

(P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して， $c^\top x^* \leq c^\top x$

**弱双対定理の系**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
$x^*$ は (P) の最適解
$y^*$ は (D) の最適解

証明 (前半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える

**(P) の最適解とは？ (定義再掲)**

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \le c^\top x$$

## 弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
$x^*$ は (P) の最適解
$y^*$ は (D) の最適解

証明 (前半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^*$

## (P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \le c^\top x$$

### 弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$

$\Rightarrow$

$x^*$ は (P) の最適解
$y^*$ は (D) の最適解

<u>証明 (前半)</u>：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^* \overset{\text{仮定}}{=} b^\top y^*$

### (P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \leq c^\top x$$

**弱双対定理の系**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
$x^*$ は (P) の最適解
$y^*$ は (D) の最適解

証明 (前半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^* \overset{\text{仮定}}{=} b^\top y^* \overset{\text{弱双対定理}}{\leq} c^\top x$

**(P) の最適解とは？ (定義再掲)**

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

(P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，　$c^\top x^* \leq c^\top x$

## 弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
$x^*$ は (P) の最適解
$y^*$ は (D) の最適解

証明 (前半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^* \overset{\text{仮定}}{=} b^\top y^* \overset{\text{弱双対定理}}{\leq} c^\top x$
- したがって，$x^*$ は (P) の最適解である

## (P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

$$\text{(P) の任意の許容解 } x \in \mathbb{R}^n \text{ に対して，} \quad c^\top x^* \leq c^\top x$$

**弱双対定理の系**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow$ $x^*$ は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$ $\quad$ $y^*$ は (D) の最適解

証明 (後半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

**(D) の最適解とは？ (定義再掲)**

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

(D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^m$ に対して， $b^\top y^* \geq b^\top y$

## 弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow$ $x^*$ は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$ 　　　　$y^*$ は (D) の最適解

証明 (後半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える

## (D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \geq b^\top y$$

### 弱双対定理の系

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の許容解} \\ c^\top x^* = b^\top y^* \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}$$

証明 (後半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^*$

### (D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \geq b^\top y$$

## 弱双対定理の系

$$\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の許容解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の許容解} \\ c^\top x^* = b^\top y^* \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \text{ は (P) の最適解} \\ y^* \text{ は (D) の最適解} \end{array}$$

<u>証明 (後半)</u>：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^* \overset{\text{仮定}}{=} c^\top x^*$

## (D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

(D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^m$ に対して，$b^\top y^* \geq b^\top y$

## 弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
$x^*$ は (P) の最適解
$y^*$ は (D) の最適解

証明 (後半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^* \overset{\text{仮定}}{=} c^\top x^* \overset{\text{弱双対定理}}{\geq} b^\top y$

## (D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \geq b^\top y$$

## 弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow$ $x^*$ は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$ $\qquad$ $y^*$ は (D) の最適解

証明 (後半)：$x^*$ と $y^*$ が仮定を満たすとする

- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^* \overset{\text{仮定}}{=} c^\top x^* \overset{\text{弱双対定理}}{\geq} b^\top y$
- したがって，$y^*$ は (D) の最適解である □

## (D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

$$\text{(D) の任意の許容解 } y \in \mathbb{R}^m \text{ に対して，} \quad b^\top y^* \geq b^\top y$$

# 線形計画法の強双対定理

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**双対問題：(D)**

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**双対問題：(D)**

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

**線形計画法の強双対定理 (証明は省略)**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解
$\Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解，$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 のとき

**弱双対定理の系**

$$c^\top x^* = b^\top y^* \Rightarrow \begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の最適解} \end{array}$$

つまり，目的関数値が一致するならば，それらは最適解

**強双対定理**

$$\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の最適解} \end{array} \Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$$

つまり，最適解ならば，目的関数値は一致する

## 目次

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

**双対問題：(D)**

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P)**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

**双対問題：(D)**

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

**相補性定理**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解
$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ll} Ax^* = b,\ x^* \geq 0 & \text{(主許容性)} \\ A^\top y^* \leq c & \text{(双対許容性)} \\ {x^*}^\top (c - A^\top y^*) = 0 & \text{(相補性)} \end{array}$$

**相補性定理 (証明したい目標)**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解
$\Leftrightarrow$
$Ax^* = b,\ x^* \geq 0$ (主許容性)
$A^\top y^* \leq c$ (双対許容性)
${x^*}^\top (c - A^\top y^*) = 0$ (相補性)

「$\Rightarrow$」の証明：

- 最適解は許容解なので，主許容性と双対許容性が成り立つことはすぐわかる
- 以下，相補性を証明するために，強双対定理を使う

**相補性定理 (証明したい目標)**

$$\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の最適解} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} Ax^* = b,\ x^* \geq 0 & \text{(主許容性)} \\ A^\top y^* \leq c & \text{(双対許容性)} \\ {x^*}^\top (c - A^\top y^*) = 0 & \text{(相補性)} \end{array}$$

<u>「⇒」の証明 (続き)</u>：

**線形計画法の強双対定理**

$$\begin{array}{l} x^* \in \mathbb{R}^n \text{ が (P) の最適解} \\ y^* \in \mathbb{R}^m \text{ が (D) の最適解} \end{array} \Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$$

- ここで，

$$\begin{aligned} {x^*}^\top (c - A^\top y^*) &= {x^*}^\top c - {x^*}^\top A^\top y^* = c^\top x^* - (Ax^*)^\top y^* \\ &\overset{\text{主許容性}}{=} c^\top x^* - b^\top y^* \\ &\overset{\text{強双対定理}}{=} 0 \end{aligned}$$

**相補性定理 (証明したい目標)**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解
$\Leftrightarrow$
$Ax^* = b,\ x^* \geq 0$ (主許容性)
$A^\top y^* \leq c$ (双対許容性)
${x^*}^\top (c - A^\top y^*) = 0$ (相補性)

「$\Leftarrow$」の証明：弱双対定理の系を使う

**弱双対定理の系**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解
$c^\top x^* = b^\top y^*$
$\Rightarrow$
$x^*$ は (P) の最適解
$y^*$ は (D) の最適解

- つまり，$c^\top x^* = {x^*}^\top c \overset{\text{相補性}}{=} {x^*}^\top A^\top y^* = (Ax^*)^\top y^* \overset{\text{主許容性}}{=} b^\top y^*$
- 弱双対定理の系より，$x^*$ は (P) の最適解，$y^*$ は (D) の最適解 □

**相補性定理**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解
$\Leftrightarrow$
$Ax^* = b,\ x^* \geq 0$ (主許容性)
$A^\top y^* \leq c$ (双対許容性)
${x^*}^\top(c - A^\top y^*) = 0$ (相補性)

$x^*, y^*$ が主許容性，双対許容性，相補性を満たすとする

- ${x^*}^\top(c - A^\top y^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(c - A^\top y^*)_i$ であり，
  $x_i^* \geq 0,\ (c - A^\top y^*)_i \geq 0$ なので

$$\begin{aligned} x_i^* > 0 \quad &\Rightarrow \quad (A^\top y^*)_i = c_i \\ (A^\top y^*)_i < c_i \quad &\Rightarrow \quad x_i^* = 0 \end{aligned}$$

## 目次

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**線形計画問題：(P')**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

**(P') の双対問題：(D')** これも線形計画問題

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P')**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**双対問題：(D')**

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} \quad & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**線形計画法の弱双対定理**

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D) の許容解 $\Rightarrow b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \leq c^\top x$

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P') の許容解であると仮定すると，

- $A_1 x = b_1$ かつ ........................................ (1)
- $A_2 x \geq b_2$ かつ ........................................ (2)
- $x \geq 0$ ........................................ (3)

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D') の許容解であると仮定すると，

- $A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c$ ........................................ (4)
- $y_2 \geq 0$ ........................................ (5)

したがって，

$$\begin{aligned} b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 &\overset{(1)}{=} (A_1 x)^\top y_1 + b_2^\top y_2 \overset{(2),\,(5)}{\leq} (A_1 x)^\top y_1 + (A_2 x)^\top y_2 \\ &= x^\top (A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2) \overset{(3),\,(4)}{\leq} x^\top c = c^\top x \quad \square \end{aligned}$$

# 線形計画法の弱双対定理：系

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

## 主問題：(P')

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

## 双対問題：(D')

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

## 弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P') の許容解
$y_1^* \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2^* \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D') の許容解
$c^\top x^* = b_1^\top y_1^* + b_2^\top y_2^*$

$\Rightarrow$

$x^*$ は (P') の最適解
$y_1^*, y_2^*$ は (D') の最適解

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

**主問題：(P')**

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

**双対問題：(D')**

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} \quad & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

**線形計画法の強双対定理**

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P') の最適解
$y_1^* \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2^* \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D') の最適解 $\Rightarrow c^\top x^* = b_1^\top y_1^* + b_2^\top y_2^*$

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

## 主問題：(P')

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

## 双対問題：(D')

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

## 相補性定理

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P') の最適解，$y_1^* \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2^* \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D') の最適解

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} A_1 x^* = b_1, A_2 x^* \geq b_2, x^* \geq 0 & \text{(主許容性)} \\ A_1^\top y_1^* + A_2^\top y_2^* \leq c, y_2^* \geq 0 & \text{(双対許容性)} \\ x^{*\top}(c - A_1^\top y_1^* - A_2^\top y_2^*) = 0 & \text{(主相補性)} \\ y_2^{*\top}(A_2 x^* - b_2) = 0 & \text{(双対相補性)} \end{array}$$

# 目次

## 今日のまとめ

線形計画法における重要概念を復習する

- 線形計画法の双対定理
- 線形計画法の相補性定理

## 次回の予告

整数計画法における重要概念を復習する

- 緩和

線形計画法，整数計画法に関連する幾何学を復習する

- 凸包
- 凸多面体

# 目次