離散最適化基礎論　第 5 回
一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 11 月 10 日

最終更新：2020 年 11 月 8 日　23:52

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)
- ⋆ 祝日 のため 休み (11/3)
5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)
- ⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/24)
7. 整数計画法の復習 (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
- ⋆ 国際会議 のため 休み (12/15)
9. 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10. 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11. 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14. 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

二部グラフの 最大マッチング問題	$\rightarrow$	二部グラフの 最小費用完全マッチング問題
$\downarrow$		$\downarrow$
一般グラフの 最大マッチング問題	$\rightarrow$	一般グラフの 最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 $\rightsquigarrow$
  費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

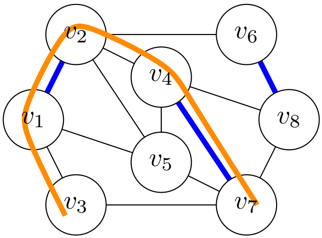
目次

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：交互道 (alternating path)

M に関する交互道とは，G における道で，
M の辺と $E - M$ の辺が交互に現れるもの

交互道を交互路と呼ぶこともある



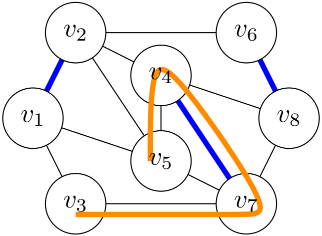
これ は 青のマッチング に関する交互道である

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：増加道 (augmenting path)

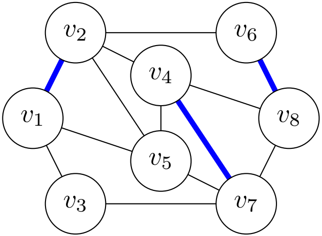
M に関する増加道とは，M に関する交互道で，
その両端点が M の辺と接続しないもの

増加道を増大道，増加路，増大路と呼ぶこともある



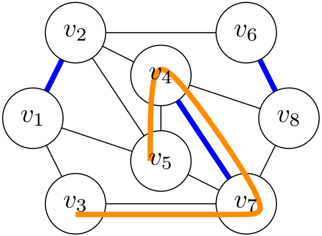
これ は 青のマッチング に関する増加道である

増加道に沿ってマッチングを大きくする



辺数 3 の
マッチング

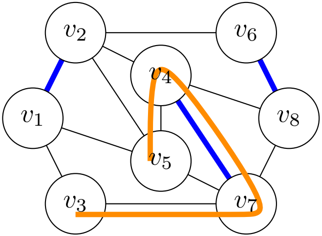
増加道に沿ってマッチングを大きくする

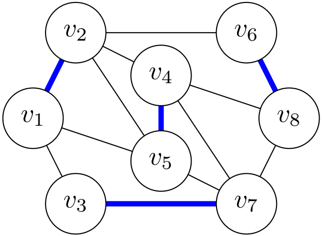


辺数 3 の
マッチング

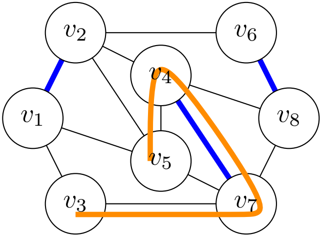
増加道

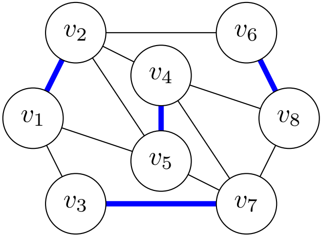
増加道に沿ってマッチングを大きくする





辺数 3 の マッチング $\rightsquigarrow$ 増加道に沿って 大きくする $\rightsquigarrow$ 辺数 4 の マッチング



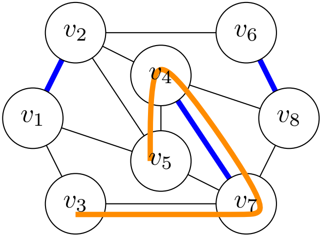


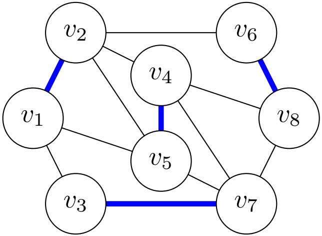
辺数 3 の マッチング $\rightsquigarrow$ 増加道に沿って 大きくする $\rightsquigarrow$ 辺数 4 の マッチング

つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

増加道に沿ってマッチングを大きくする





辺数 3 の マッチング $\rightsquigarrow$ 増加道に沿って大きくする $\rightsquigarrow$ 辺数 4 の マッチング

つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

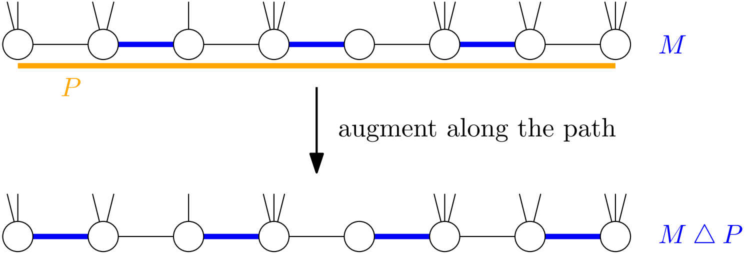
つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

無向グラフ $G=(V,E)$，マッチング $M \subseteq E$

定理：最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

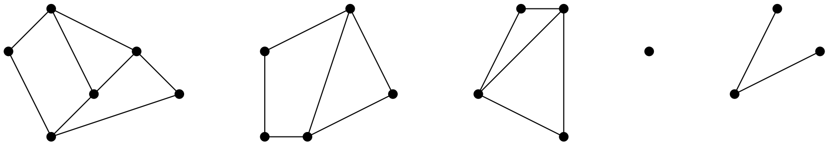
M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M に関する増加道が存在しない



無向グラフ $G = (V, E)$

定義：奇成分 (odd component)

G の奇成分とは，
G における連結成分で，頂点数が奇数であるもののこと



記法：奇成分の総数

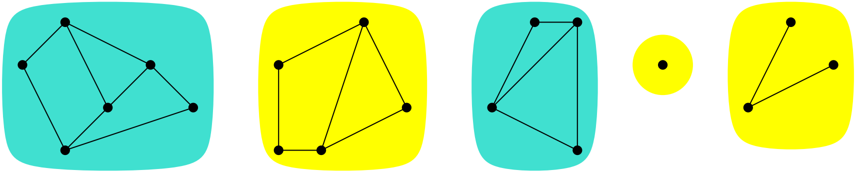
$o(G) = G$ における奇成分の総数

上の例では，$o(G) = 3$

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：奇成分 (odd component)

G の奇成分とは，
G における連結成分で，頂点数が奇数であるもののこと



記法：奇成分の総数

$o(G) = G$ における奇成分の総数

上の例では，$o(G) = 3$

定理：Berge–Tutte の公式

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

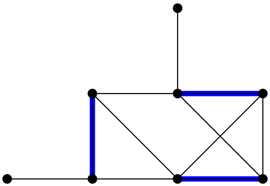
$$|\text{最大マッチング}| = \min \frac{1}{2}\{|V| - o(G-U) + |U| \mid U \subseteq V\}$$

「$\leq$」の証明 (弱双対性) は簡単,「$\geq$」の証明で Tutte の定理を使う

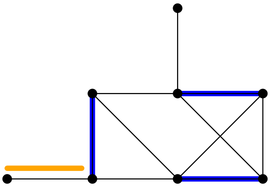
二部グラフ	→	一般グラフ
Hall の結婚定理	→	Tutte の定理
Kőnig–Ore の公式	→	Berge–Tutte の公式
Kőnig–Egerváry の定理	→	???

目次

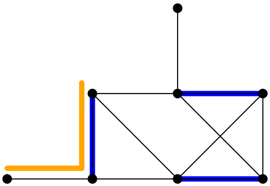
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



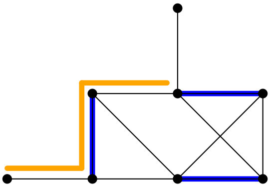
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



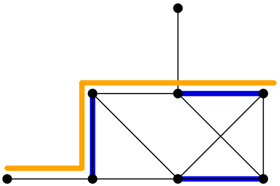
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



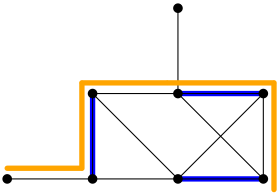
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



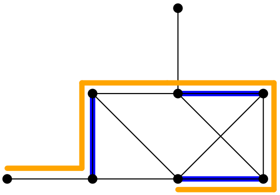
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



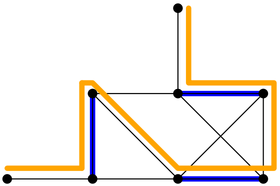
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



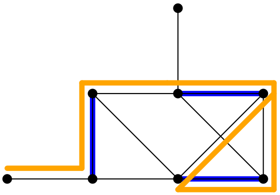
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



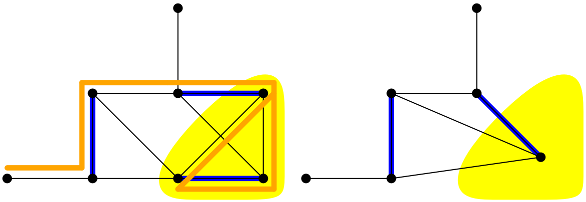
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



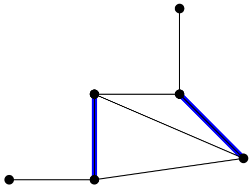
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



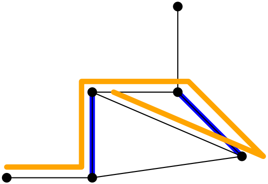
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



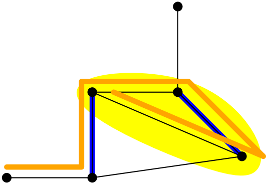
一般グラフにおける増加道の探索 (2)

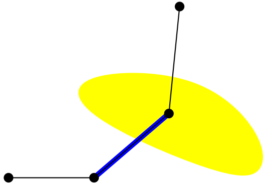


一般グラフにおける増加道の探索 (2)

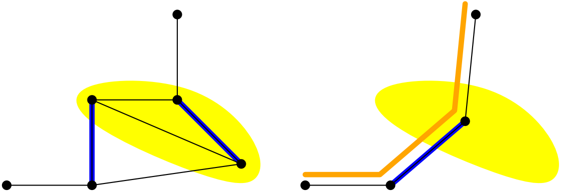


一般グラフにおける増加道の探索 (2)

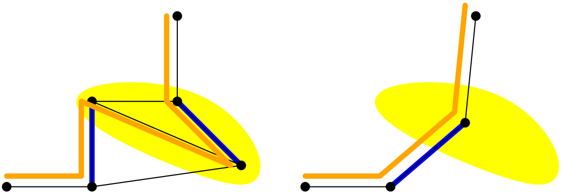




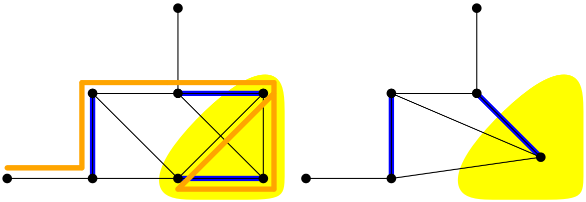
一般グラフにおける増加道の探索 (2)



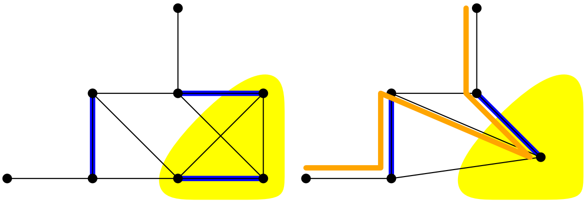
一般グラフにおける増加道の探索 (2)



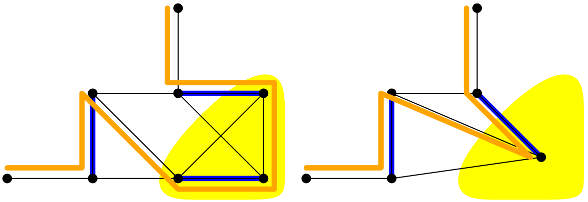
一般グラフにおける増加道の探索 (3)



一般グラフにおける増加道の探索 (3)



一般グラフにおける増加道の探索 (3)



目次

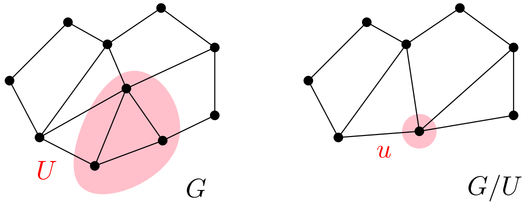
1. 復習：前回までの重要概念
2. 一般グラフにおける増加道の探索：アイディア
3. グラフの縮約と花
4. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム
5. 今日のまとめ と 次回の予告

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $U \subseteq V$

定義：縮約 (contraction)

G における U の縮約とは，次のグラフ G/U

- G/U の頂点集合 $= V - U \cup \{u\}$ (ただし，$u \notin V$)
- G/U の辺集合 $= (E - \{e \in E \mid U \cap e \neq \emptyset\}) \cup$
  $\{\{v, u\} \mid$ ある $x \in U$ に対して $\{v, x\} \in E\}$



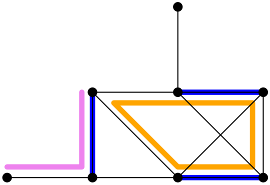
「頂点集合 U を頂点 u に縮約する」ということもある

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$

定義：花 (blossom)

M に関する花とは，長さ $2k+1$ の G の閉路 C で，次を満たすもの

- M と k 個の辺を共有する
- C の中で M に飽和されていない頂点と，M に飽和されない頂点を結ぶ偶数長の交互道 (ただし，C の辺を使わない) が存在する



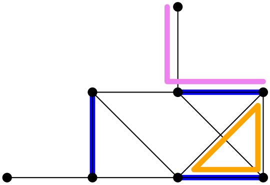
これは花である

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$

定義：花 (blossom)

M に関する花とは，長さ $2k+1$ の G の閉路 C で，次を満たすもの

- M と k 個の辺を共有する
- C の中で M に飽和されていない頂点と，M に飽和されない頂点を結ぶ偶数長の交互道 (ただし，C の辺を使わない) が存在する



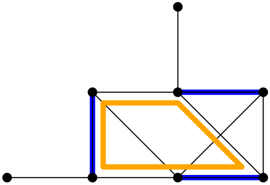
これは花である

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$

定義：花 (blossom)

M に関する花とは，長さ $2k+1$ の G の閉路 C で，次を満たすもの

- M と k 個の辺を共有する
- C の中で M に飽和されていない頂点と，M に飽和されない頂点を結ぶ偶数長の交互道 (ただし，C の辺を使わない) が存在する

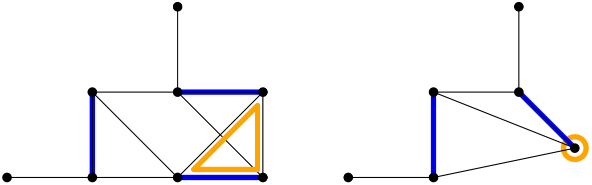


これは花ではない

無向グラフ $G=(V,E)$，G のマッチング M，M に関する花 C

定義：花の縮約

C の縮約 G/C に伴い，M も縮約する (その結果を M/C と書く)

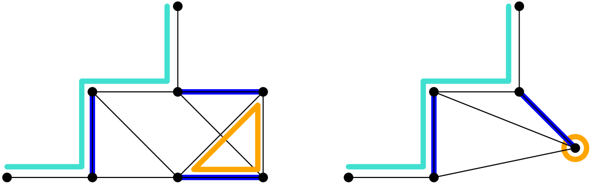


$\boxed{注}$：M/C は G/C のマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング M，M に関する花 C

性質：花の縮約と最大マッチング

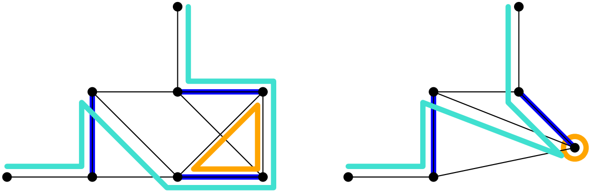
M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M/C が G/C の最大マッチング



無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング M，M に関する花 C

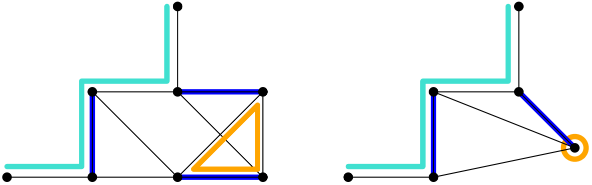
性質：花の縮約と最大マッチング

M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M/C が G/C の最大マッチング



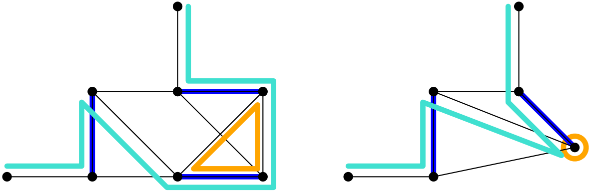
証明 (⇒)：M が G の最大マッチングではないとする

- G には，M に関する増加道 P が存在する
- このとき，P/C は G/C の M/C に関する増加道である (なぜ？)
- すなわち，M/C は G/C の最大マッチングではない □



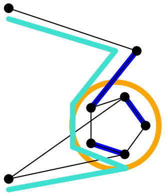
証明 (⇒)：M が G の最大マッチングではないとする

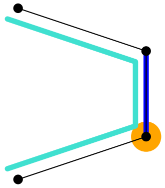
- G には，M に関する増加道 P が存在する
- このとき，P/C は G/C の M/C に関する増加道である　　(なぜ？)
- すなわち，M/C は G/C の最大マッチングではない　□



<u>証明 ($\Leftarrow$)</u>：M/C が G/C の最大マッチングではないとする

- G/C には，M/C に関する増加道 P' が存在する
- このとき，G の M に関する増加道を P' から作れる (なぜ？)
- すなわち，M は G の最大マッチングではない □





<u>証明 (⇐)</u>：M/C が G/C の最大マッチングではないとする

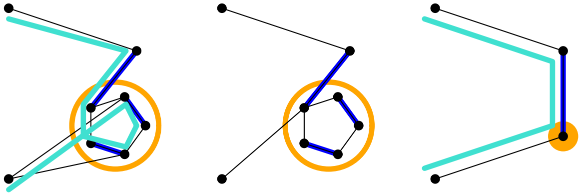
- G/C には，M/C に関する増加道 P' が存在する
- このとき，G の M に関する増加道を P' から作れる　(なぜ？)
- すなわち，M は G の最大マッチングではない □

証明 ($\Leftarrow$)：M/C が G/C の最大マッチングではないとする

- G/C には，M/C に関する増加道 P' が存在する
- このとき，G の M に関する増加道を P' から作れる (なぜ？)
- すなわち，M は G の最大マッチングではない □

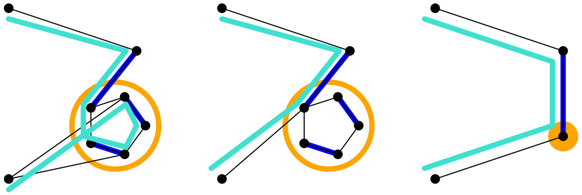
<u>証明 ($\Leftarrow$)</u>：M/C が G/C の最大マッチングではないとする

- G/C には，M/C に関する増加道 P' が存在する
- このとき，G の M に関する増加道を P' から作れる (なぜ？)
- すなわち，M は G の最大マッチングではない □



<u>証明 ($\Leftarrow$)</u>：M/C が G/C の最大マッチングではないとする

- G/C には，M/C に関する増加道 P' が存在する
- このとき，G の M に関する増加道を P' から作れる (なぜ？)
- すなわち，M は G の最大マッチングではない □



目次

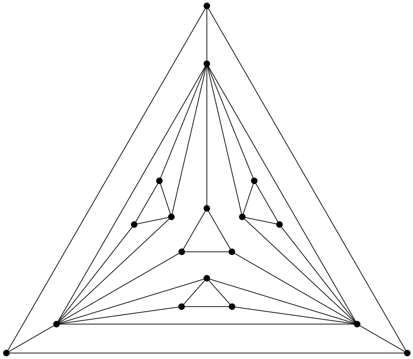
無向グラフ $G = (V, E)$

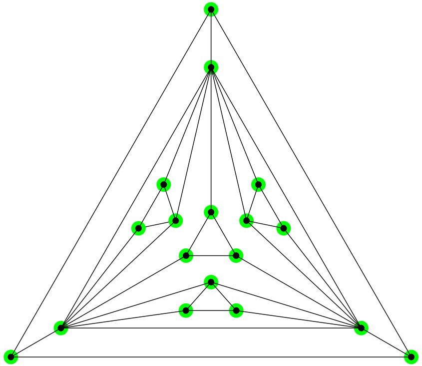
基本的な考え方

G のマッチング M を常に保持する

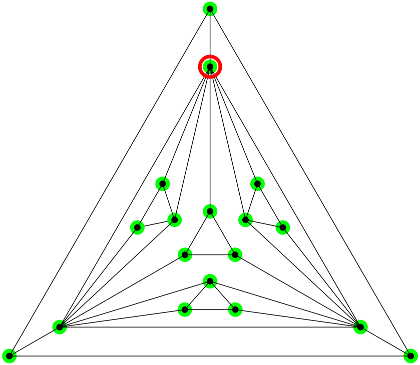
- M に関する花 C か増加道 P を見つけようとする
- 花 C が見つかったとき
  - $G := G/C$，$M := M/C$ として，繰り返す
- 増加道 P が見つかったとき
  - 縮約を解除して，もとのグラフの増加道 P' を見つける
  - $M := M \triangle P'$ とする
- 花も増加道も見つからないとき
  - M が G の最大マッチングであるはず
  - Berge–Tutte の公式を用いて，最適性を保証する

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



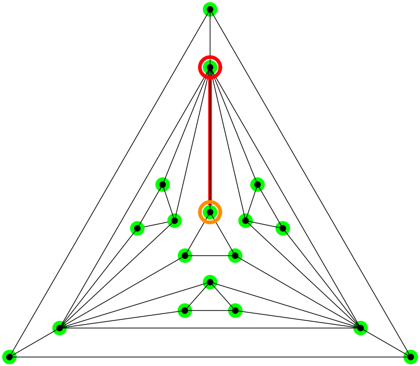


マッチングに飽和されない頂点

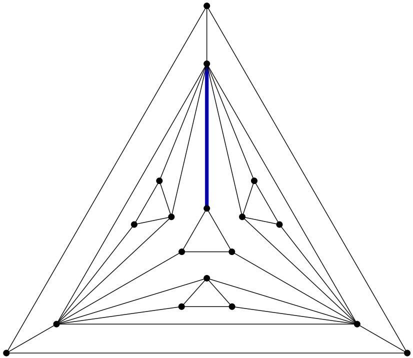


マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ

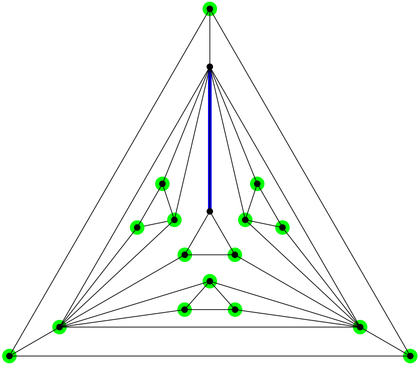
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



一歩で進める頂点を見つける

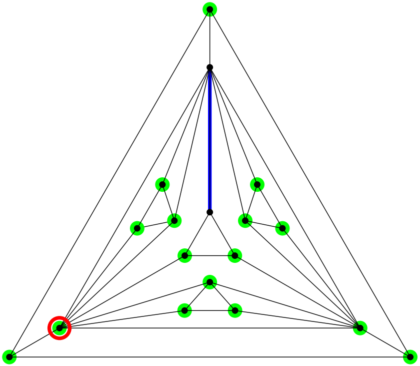


増加道が見つかったので，それに沿ってマッチングを大きくする

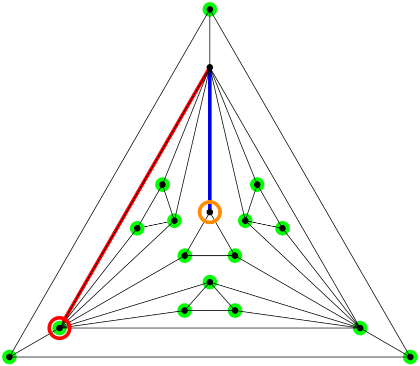


マッチングに飽和されない頂点

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

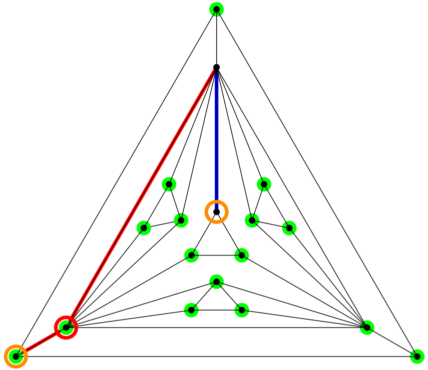


マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ

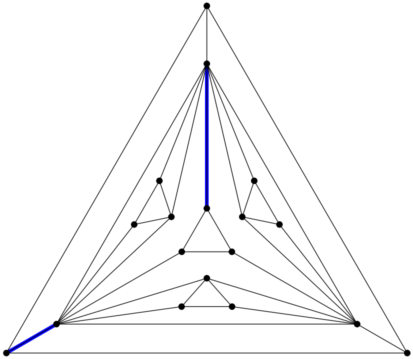


一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

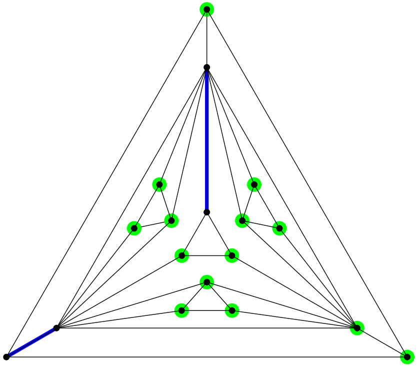


一歩で進める頂点を見つける

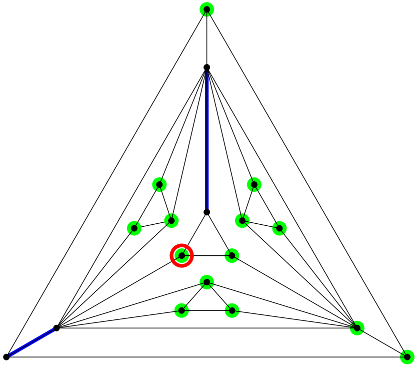


増加道が見つかったので，それに沿ってマッチングを大きくする

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

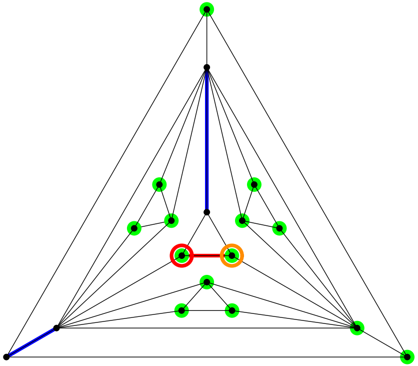


マッチングに飽和されない頂点

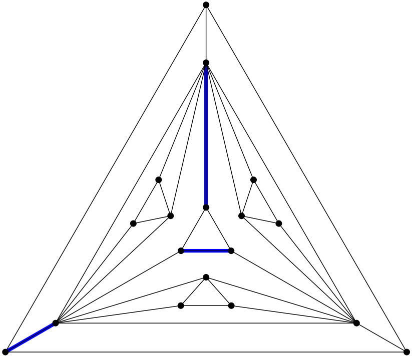


マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

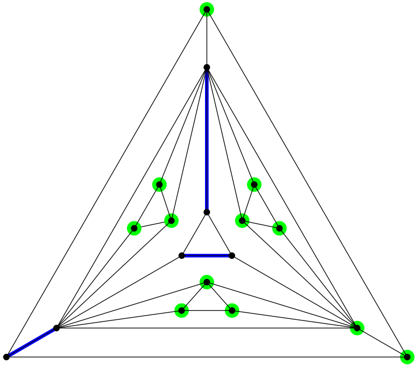


一歩で進める頂点を見つける

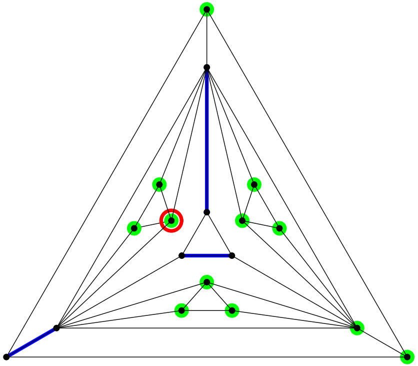


増加道が見つかったので，それに沿ってマッチングを大きくする

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

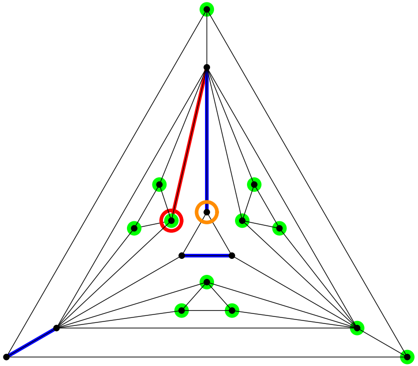


マッチングに飽和されない頂点



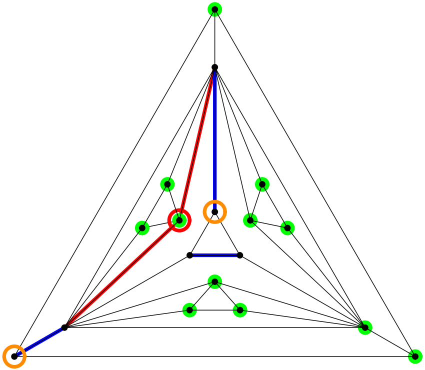
マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

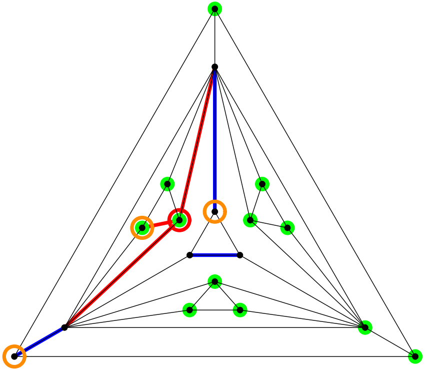


一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

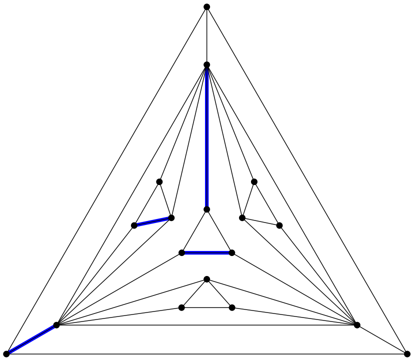
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

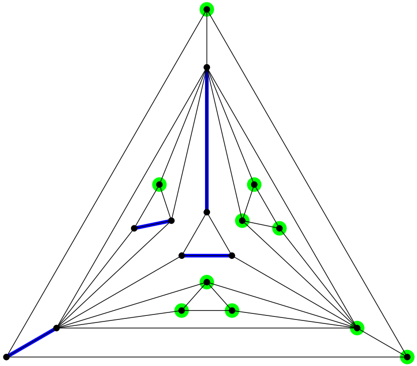


一歩で進める頂点を見つける

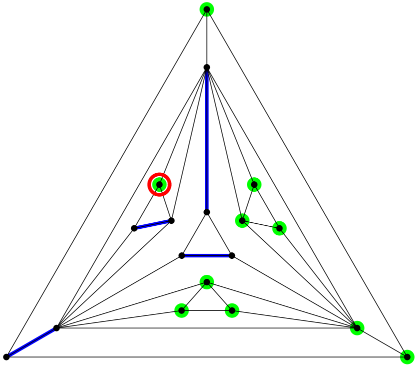


増加道が見つかったので，それに沿ってマッチングを大きくする

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

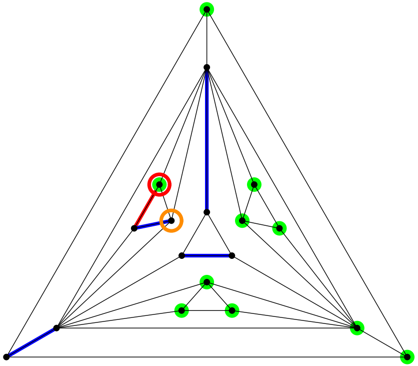


マッチングに飽和されない頂点

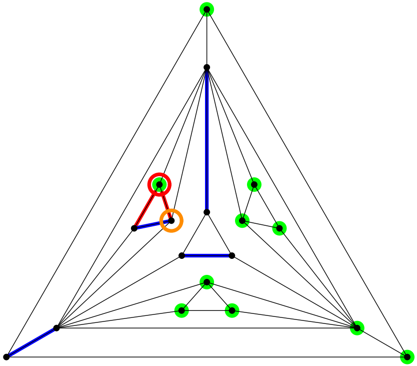


マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

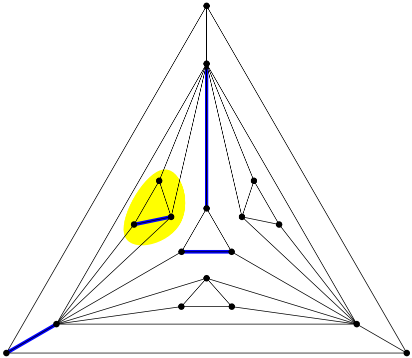


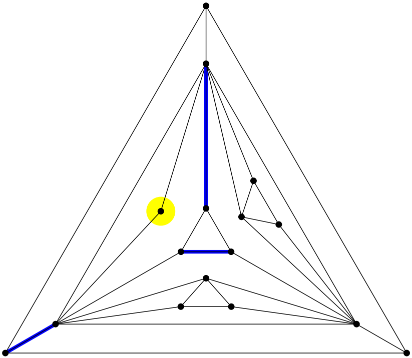
一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む



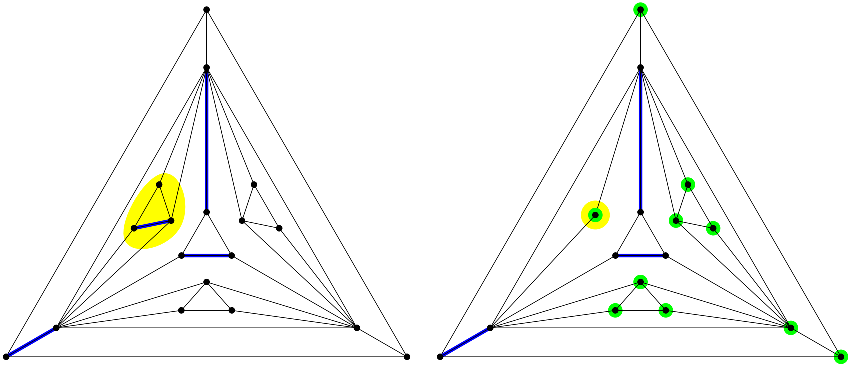
一歩で進める頂点を見つける

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

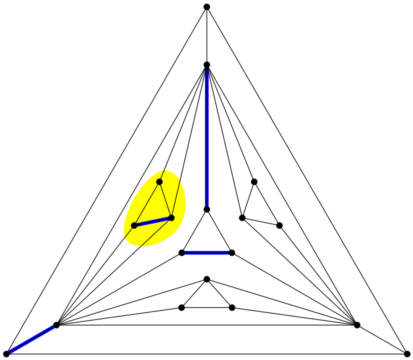


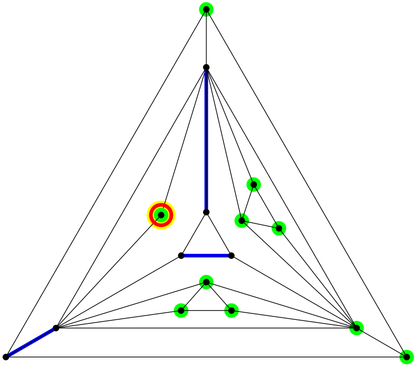


花が見つかったので，それを縮約する

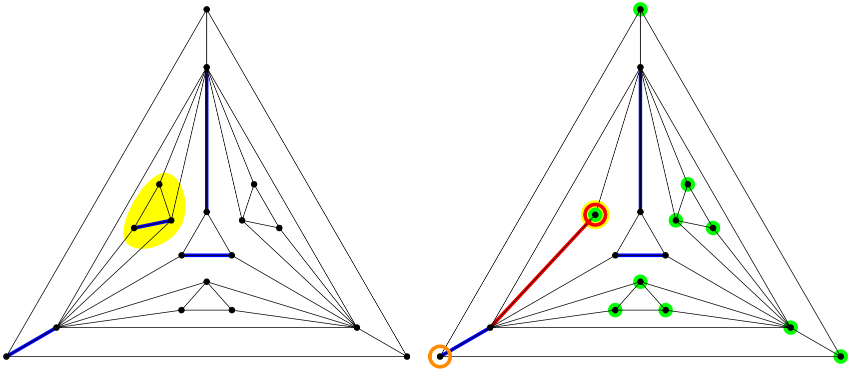


マッチングに飽和されない頂点



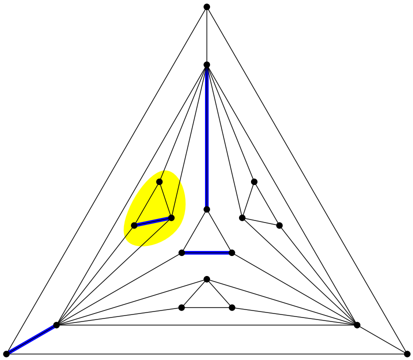


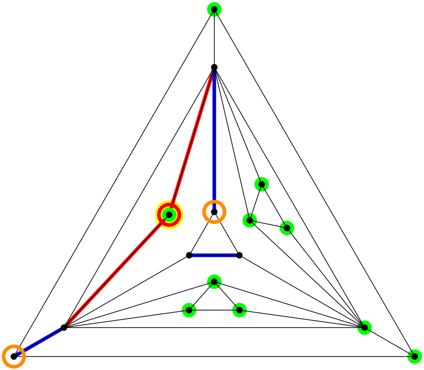
マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ



一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

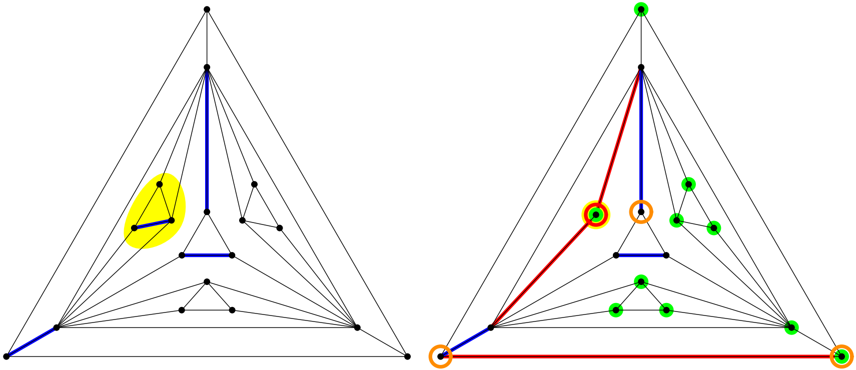
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



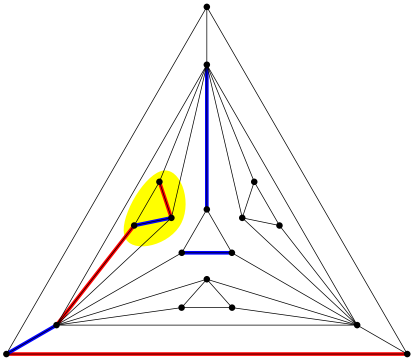


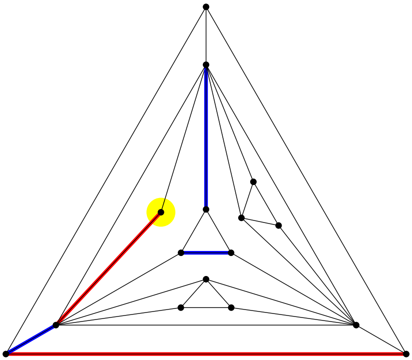
一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

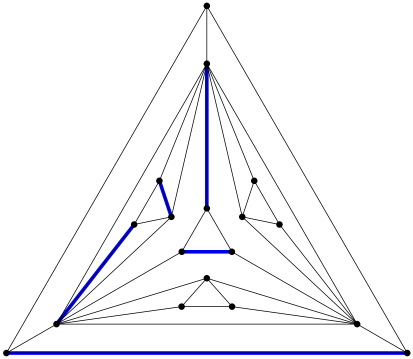


一歩で進める頂点を見つける

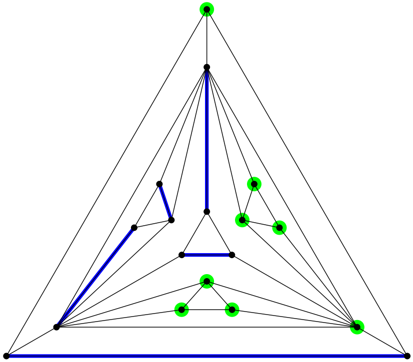




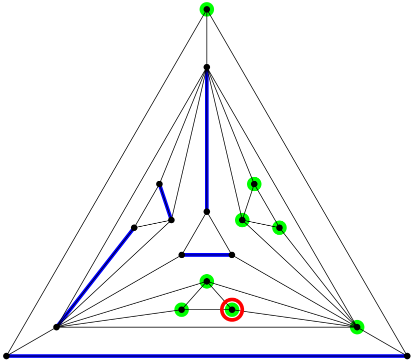
増加道が見つかったので，それに沿ってマッチングを大きくする



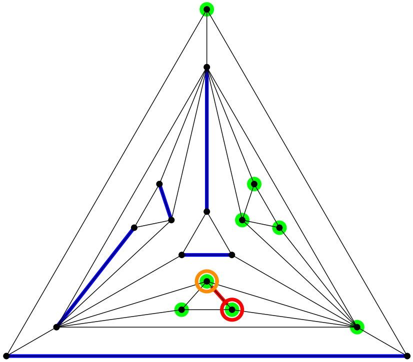
増加道が見つかったので，それに沿ってマッチングを大きくする



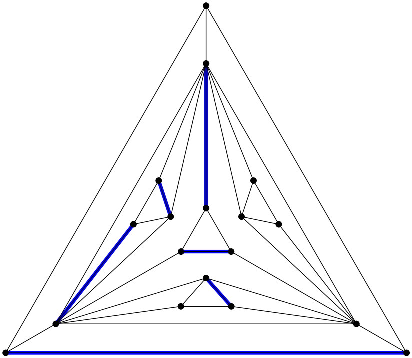
マッチングに飽和されない頂点



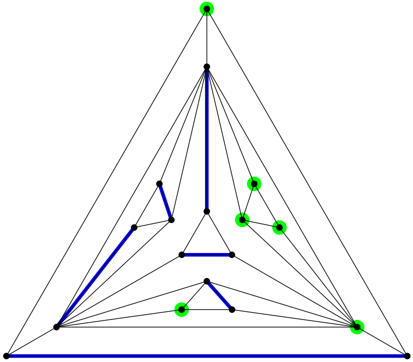
マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ



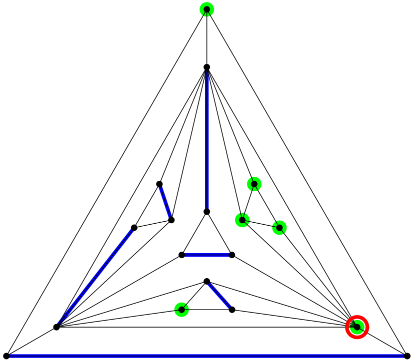
一歩で進める頂点を見つける



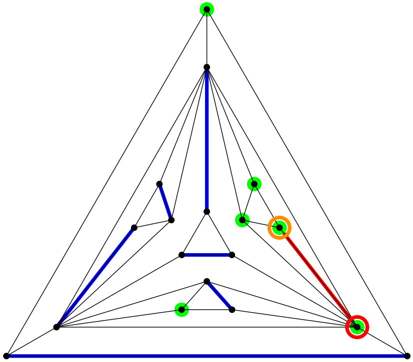
増加道が見つかったので，それに沿ってマッチングを大きくする



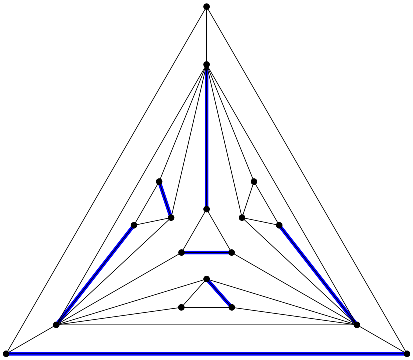
マッチングに飽和されない頂点



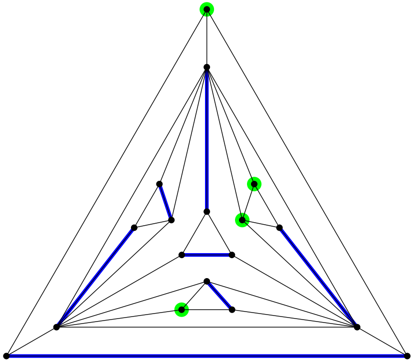
マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ



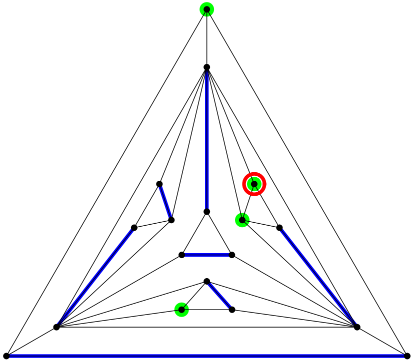
一歩で進める頂点を見つける



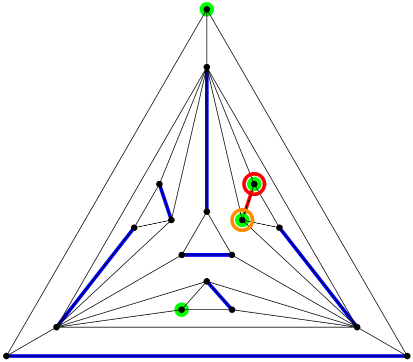
増加道が見つかったので，それに沿ってマッチングを大きくする



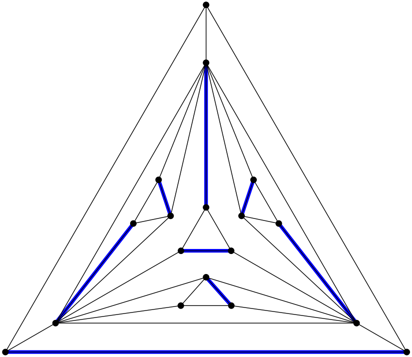
マッチングに飽和されない頂点



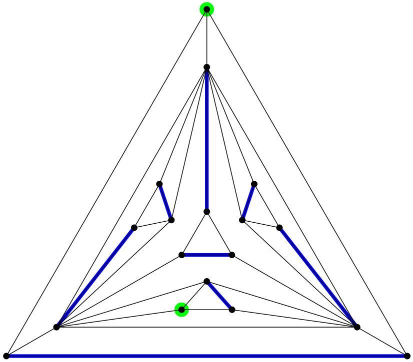
マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ



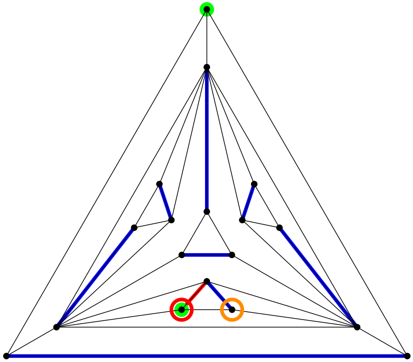
一歩で進める頂点を見つける



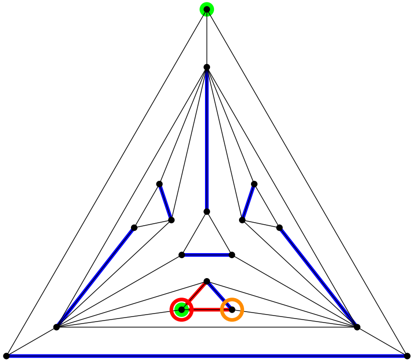
増加道が見つかったので，それに沿ってマッチングを大きくする



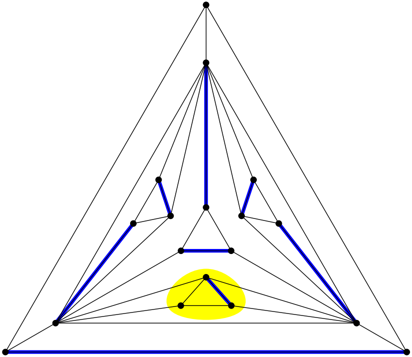
マッチングに飽和されない頂点

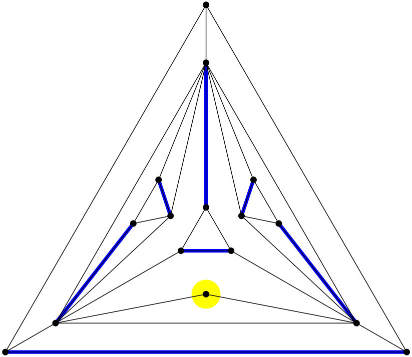


マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ
一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

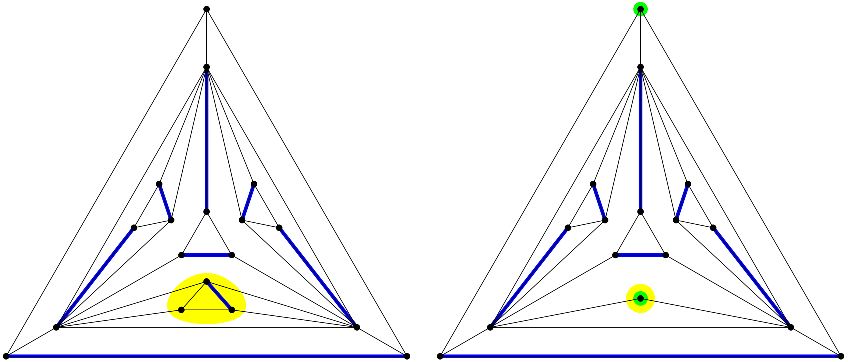


一歩で進める頂点を見つける

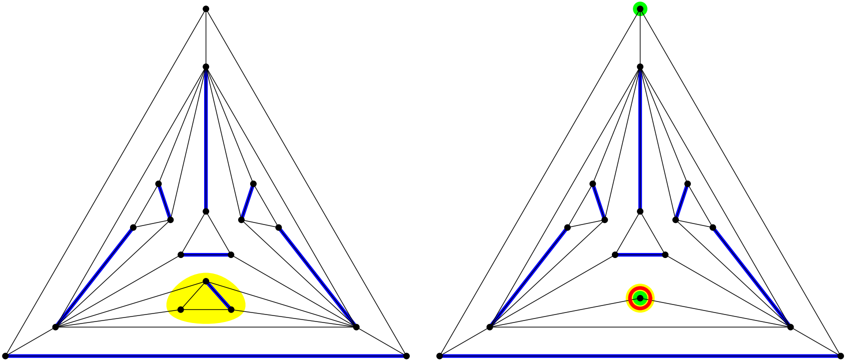




花が見つかったので，それを縮約する

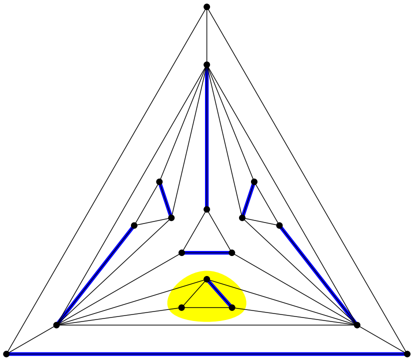


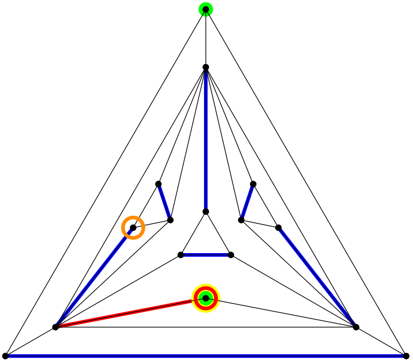
マッチングに飽和されない頂点



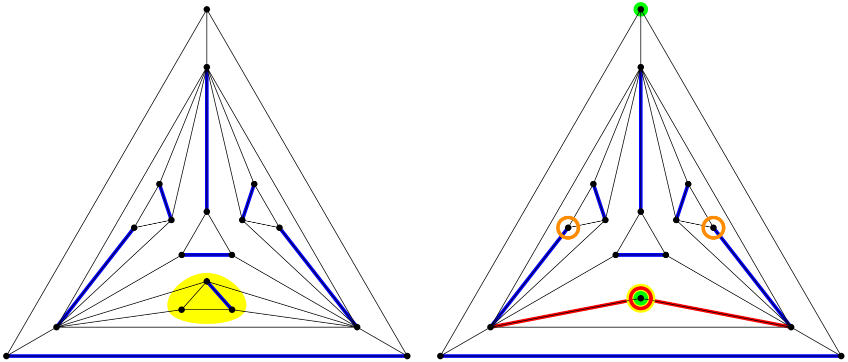
マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

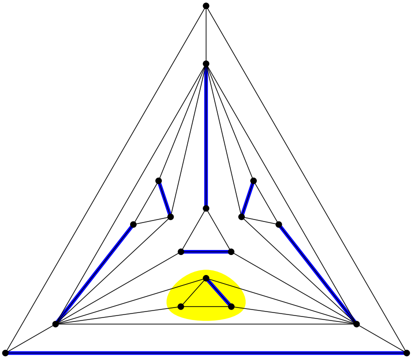


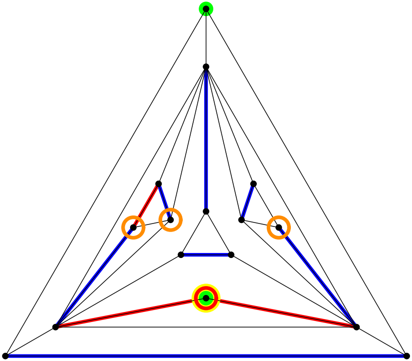


一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

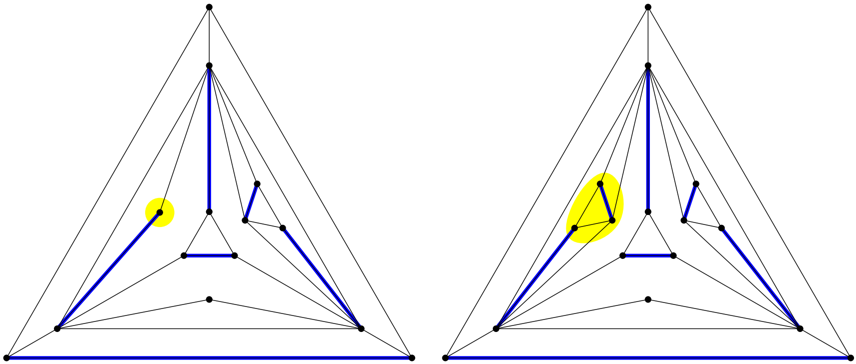


一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

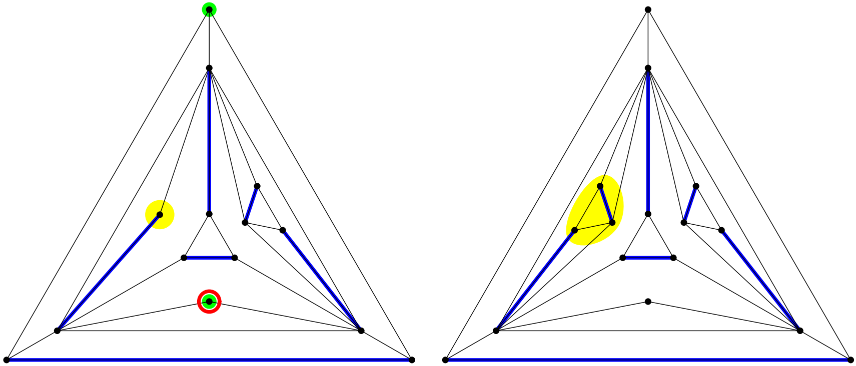




一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

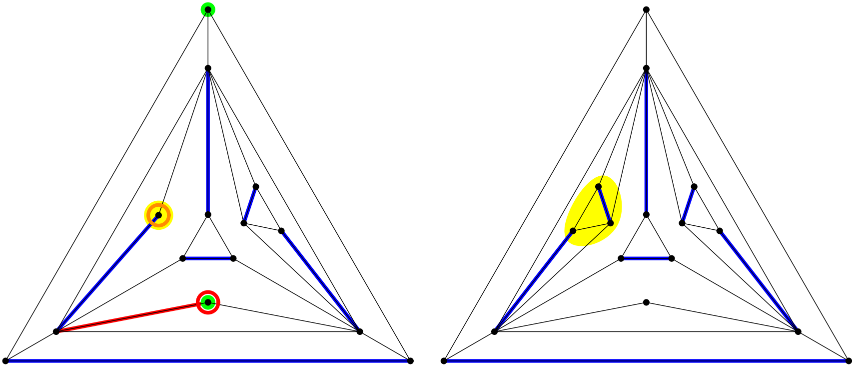


花が見つかったので，それを縮約する



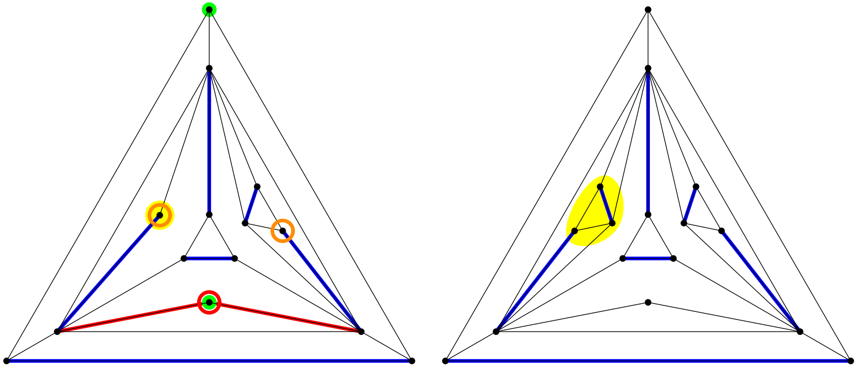
マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



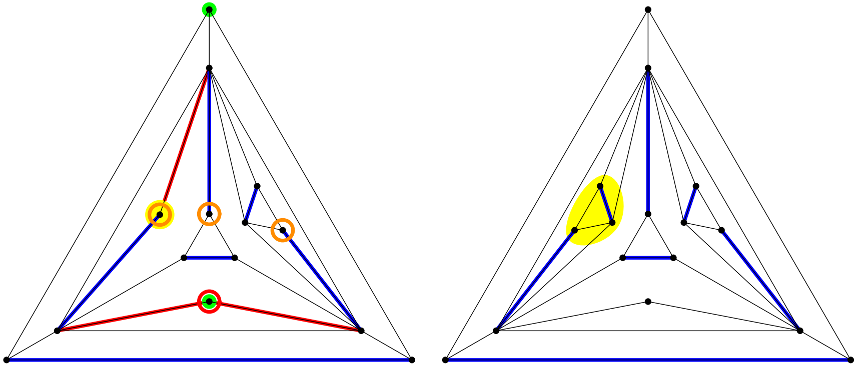
一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

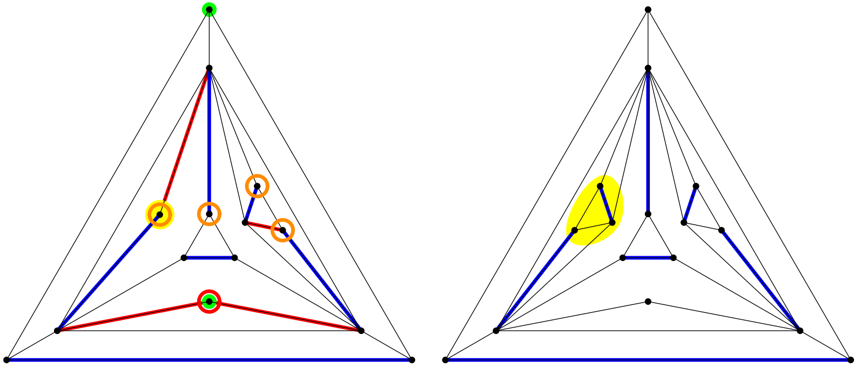


一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

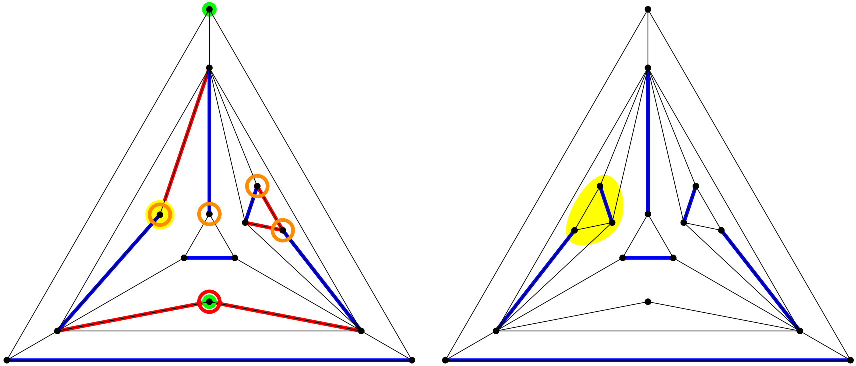


一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

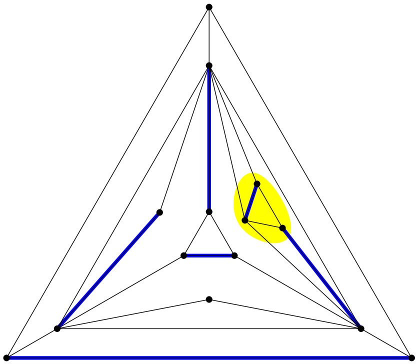


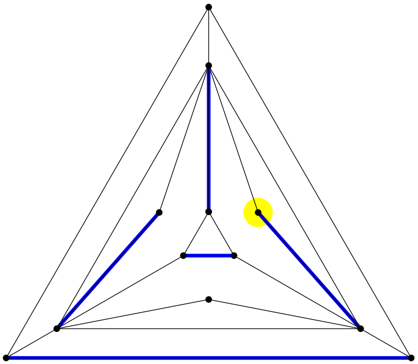
一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



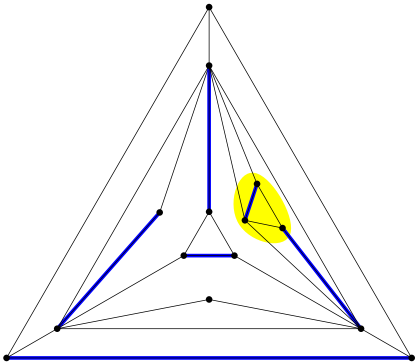
一歩で進める頂点を見つける

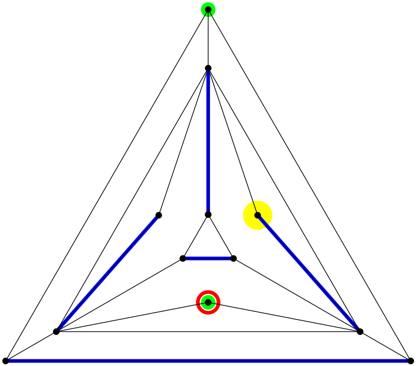




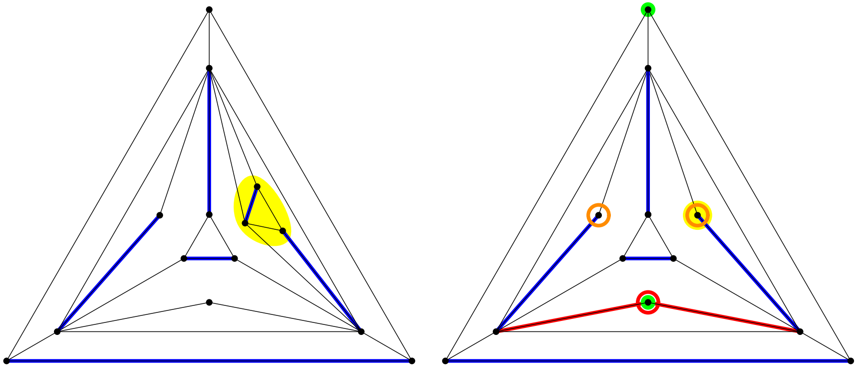
花が見つかったので，それを縮約する

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



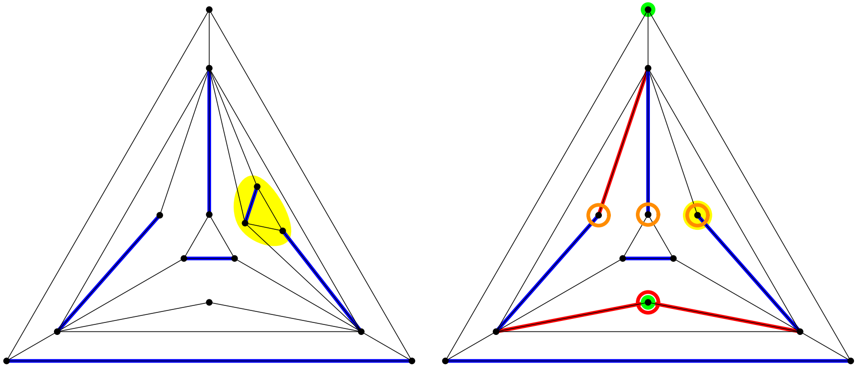


マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ



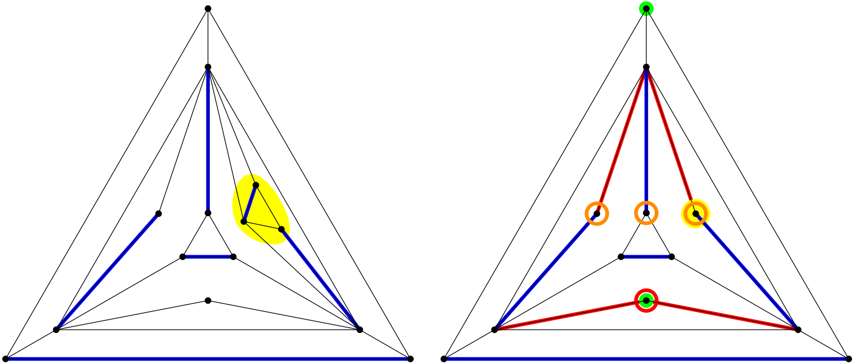
一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



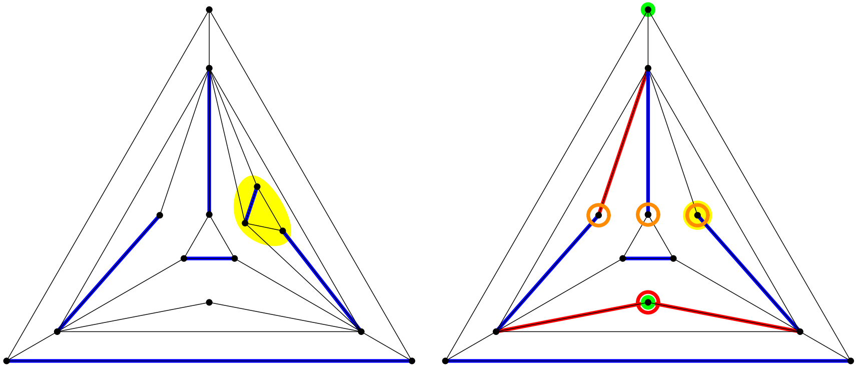
一歩で進める頂点を見つける
マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

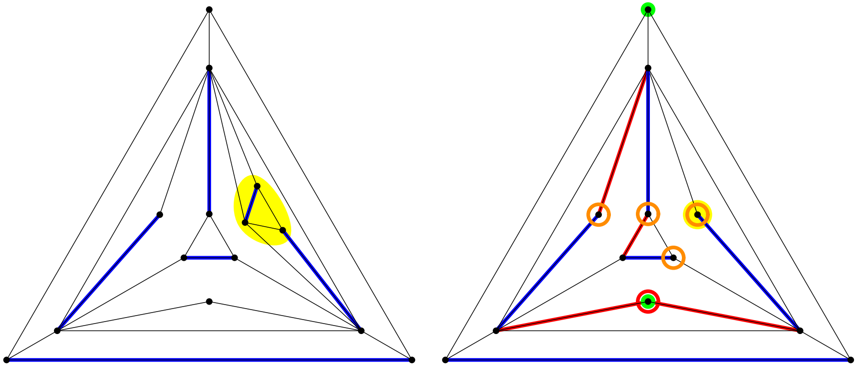


一歩で進める頂点を見つける
偶数長の閉路が見つかった場合は，進まずそのまま継続する

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



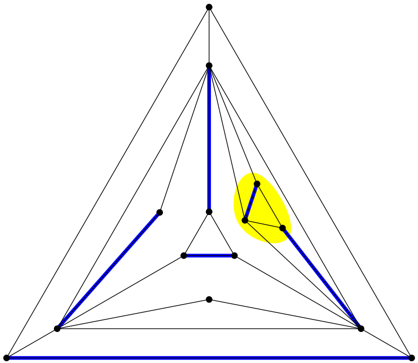
一歩で進める頂点を見つける
偶数長の閉路が見つかった場合は，進まずそのまま継続する

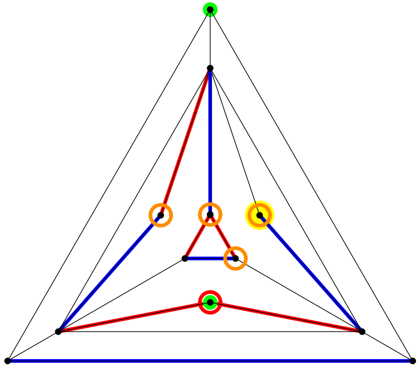


一歩で進める頂点を見つける

マッチングの辺が接続している場合は，それに沿って進む

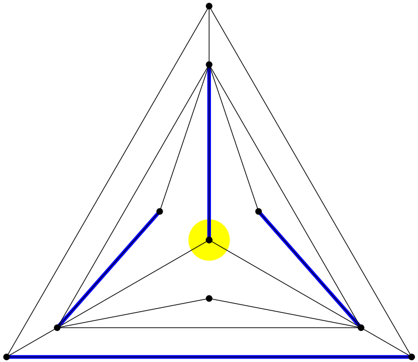
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

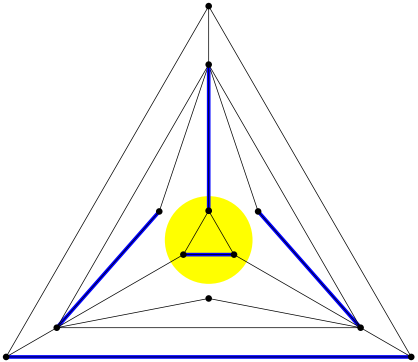




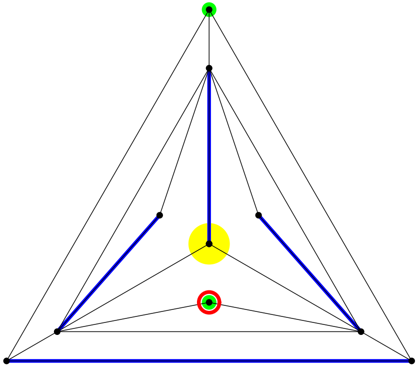
一歩で進める頂点を見つける

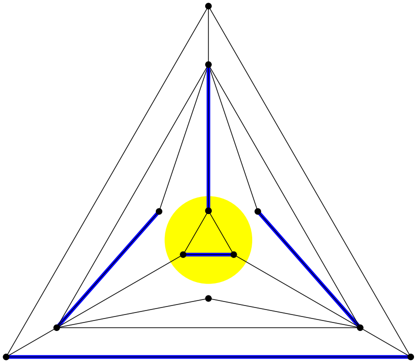
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



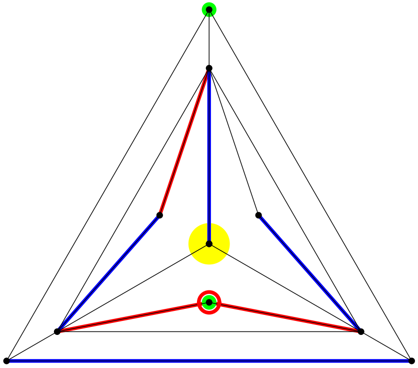


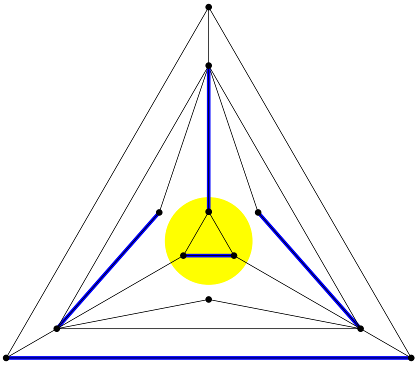
花が見つかったので，それを縮約する



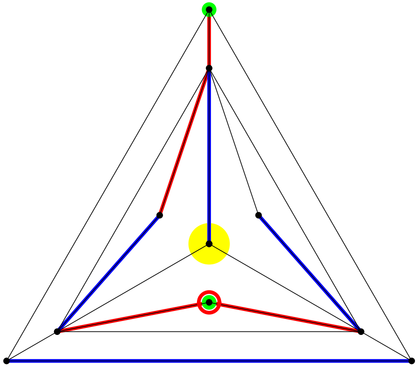


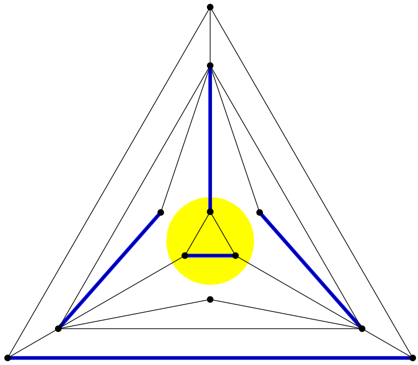
マッチングに飽和されない頂点を 1 つ選ぶ



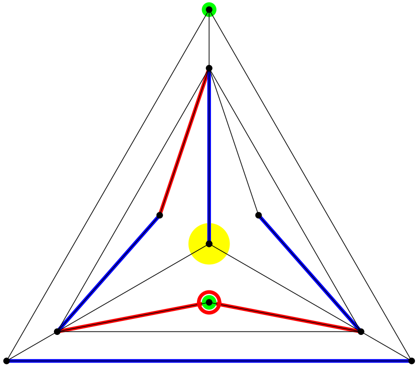


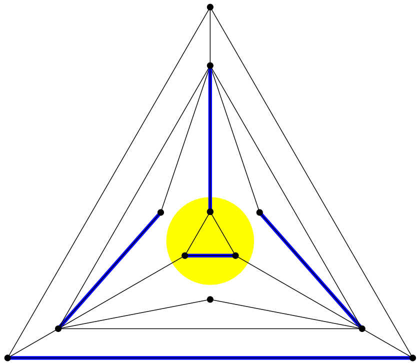
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



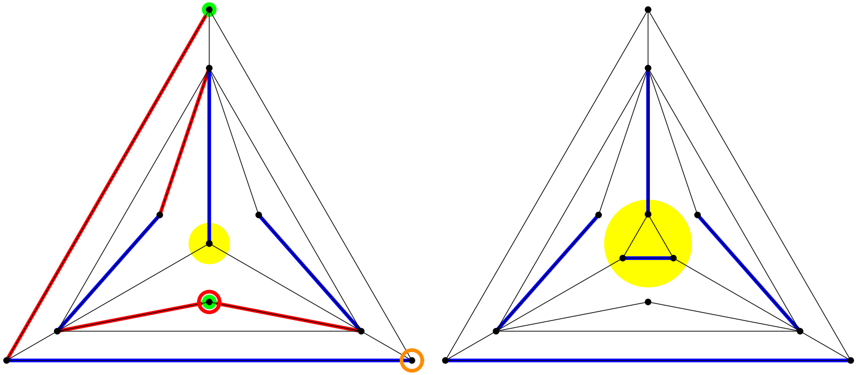


一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

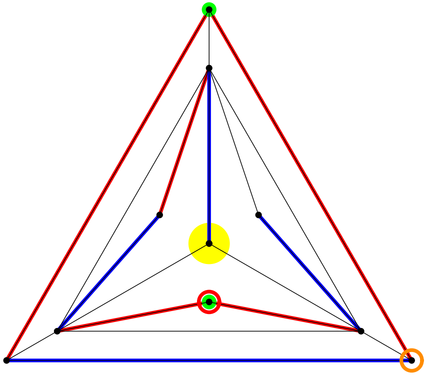


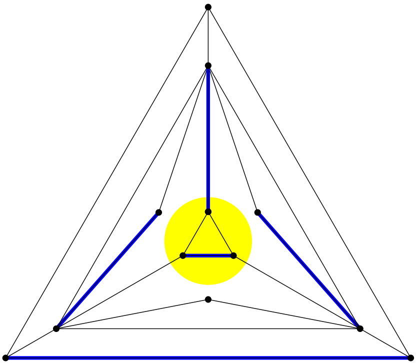


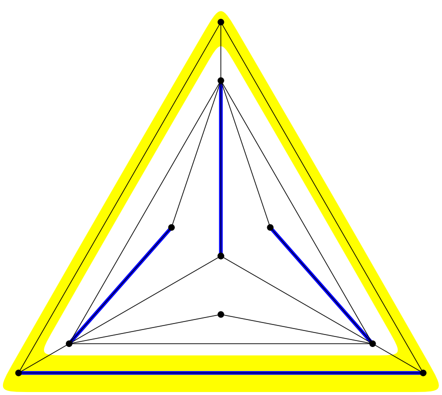
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

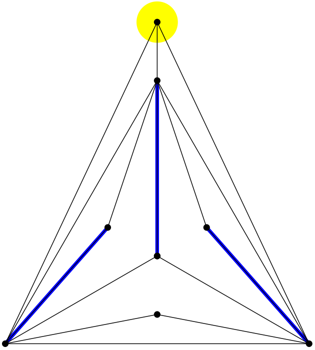


一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

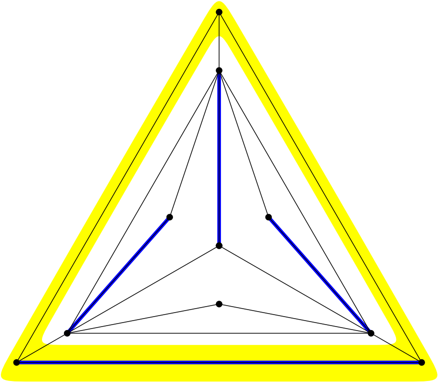


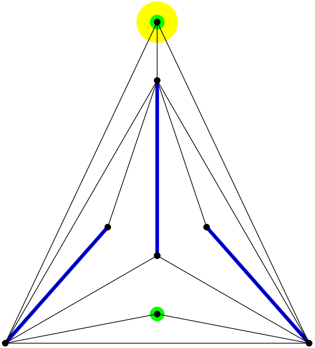




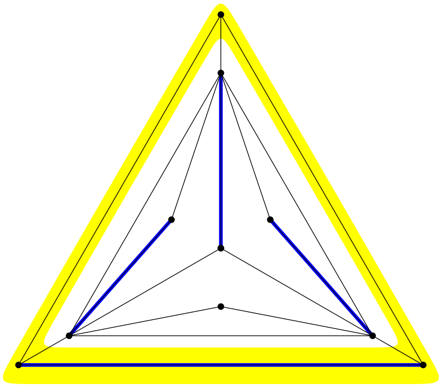


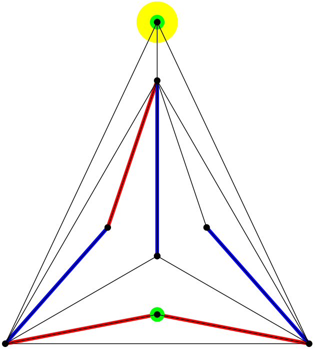
花が見つかったので，それを縮約する



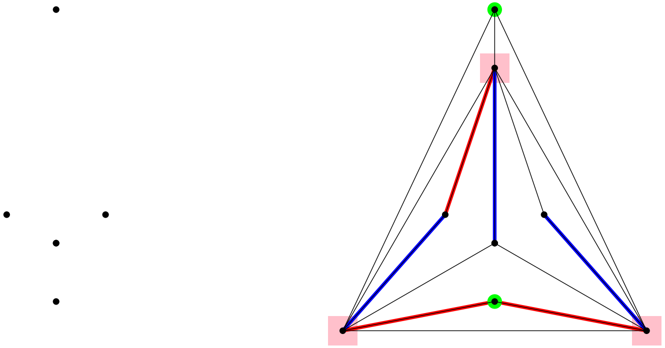


一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

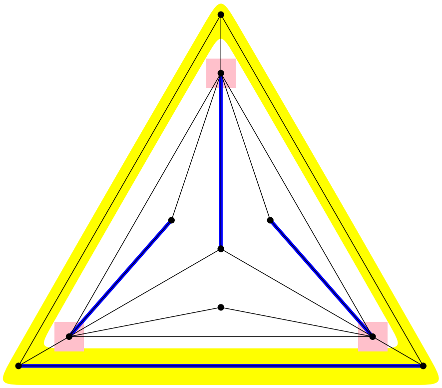


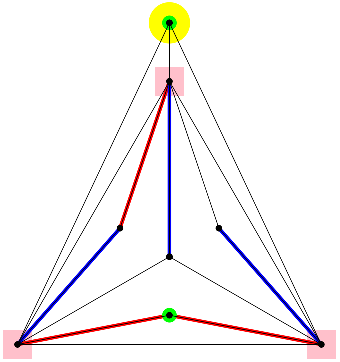


一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

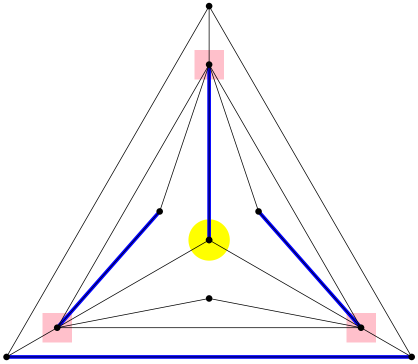


赤い辺で到達した頂点を集めて，U とする



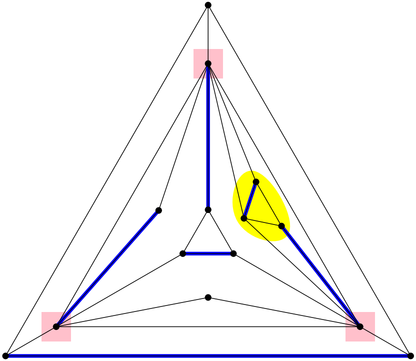


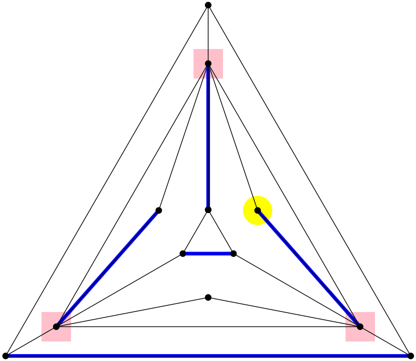
赤い辺で到達した頂点を集めて，U とする



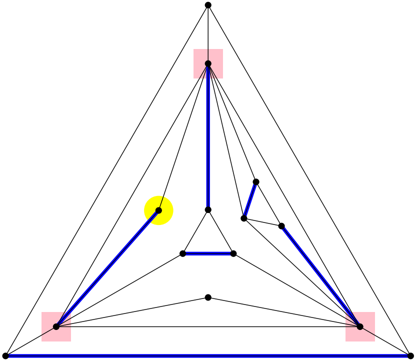
赤い辺で到達した頂点を集めて，U とする

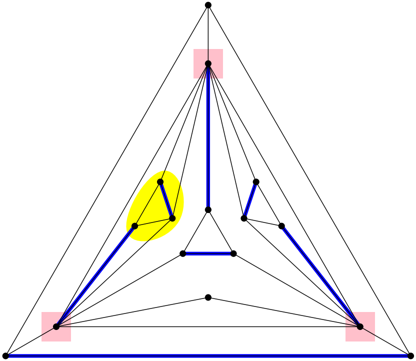
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例





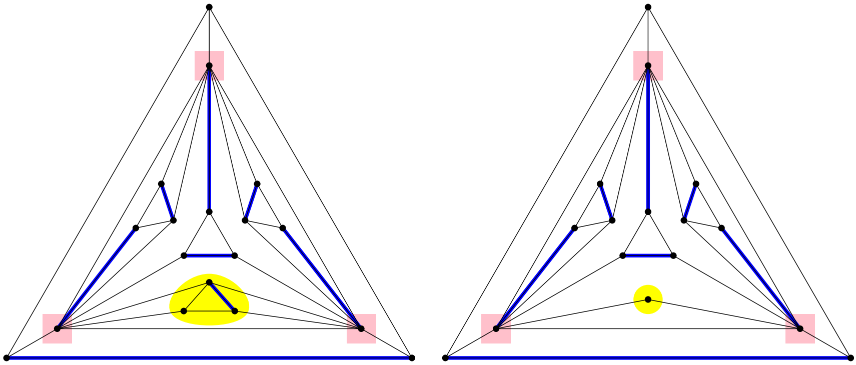
赤い辺で到達した頂点を集めて，U とする





赤い辺で到達した頂点を集めて，U とする

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例

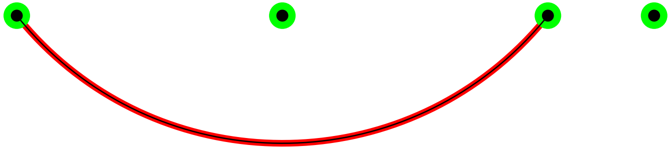


赤い辺で到達した頂点を集めて，U とする

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

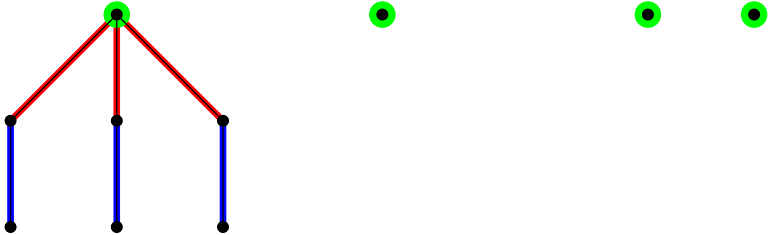
緑の頂点はマッチングに飽和されない頂点

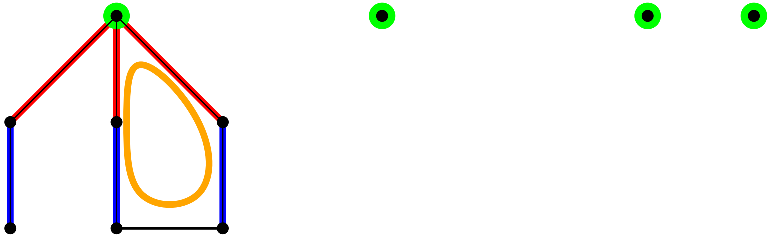
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ



飽和されない頂点どうしを結ぶ辺があれば，それは増加道

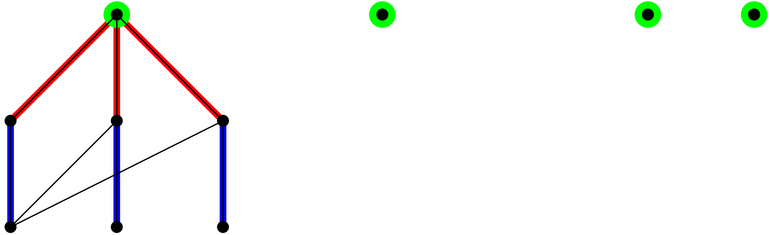
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ



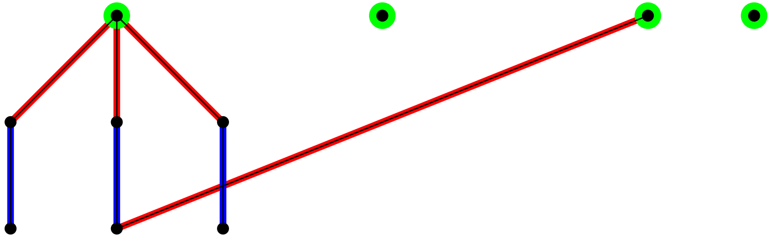


青い辺でたどり着いた頂点どうしを結ぶ辺があれば，花が見つかる

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

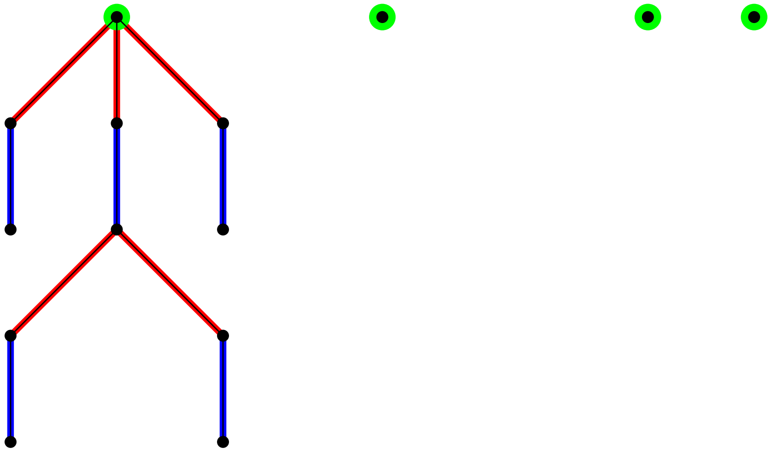


一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

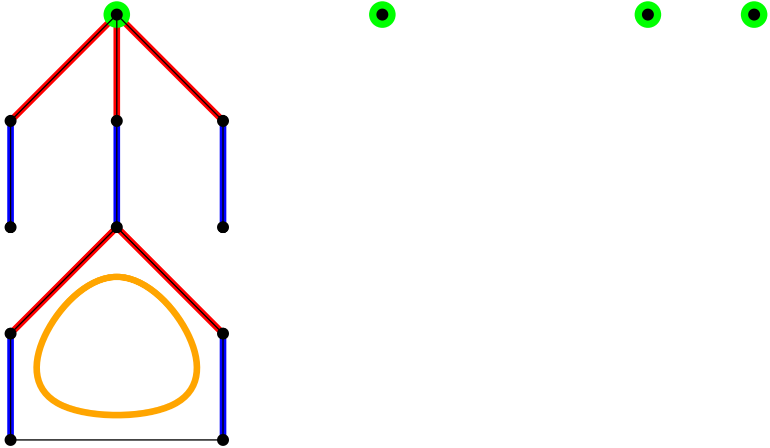


青い辺でたどり着いた頂点と緑の頂点を結ぶ辺があれば，
増加道が見つかる

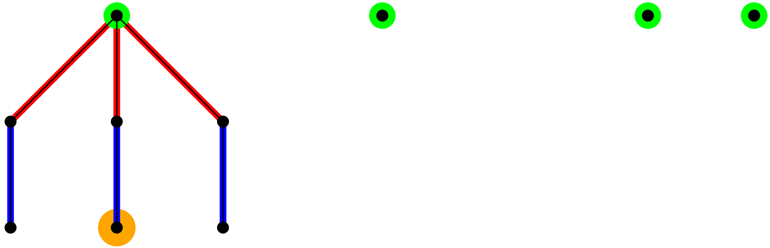
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ



一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ

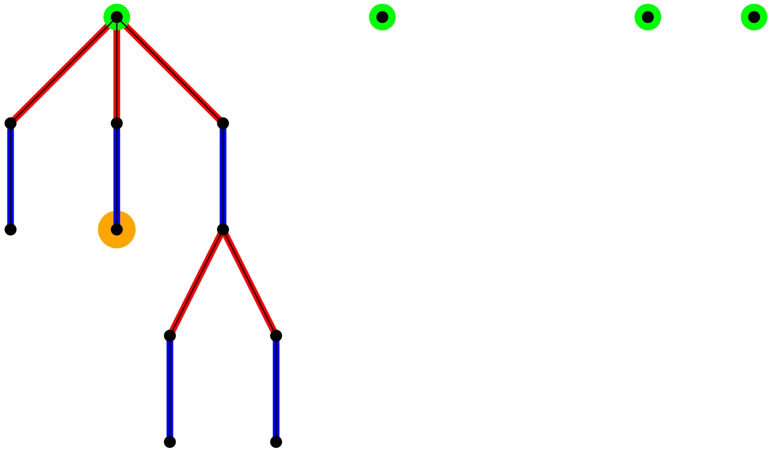


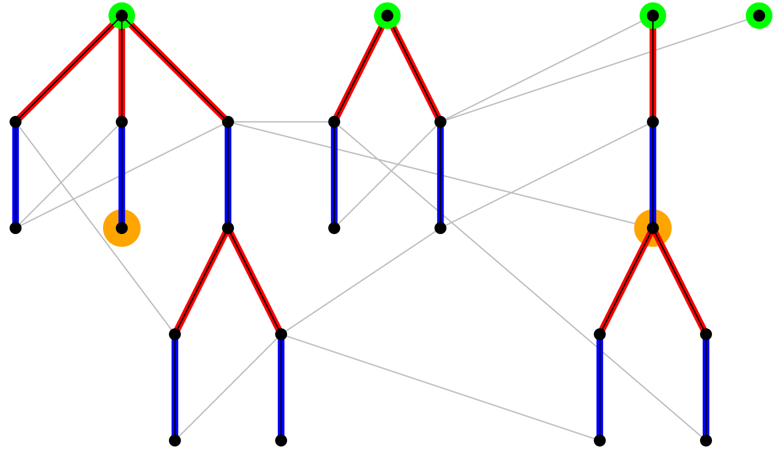
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ



縮約でできた頂点は青い辺でたどり着いた頂点となる

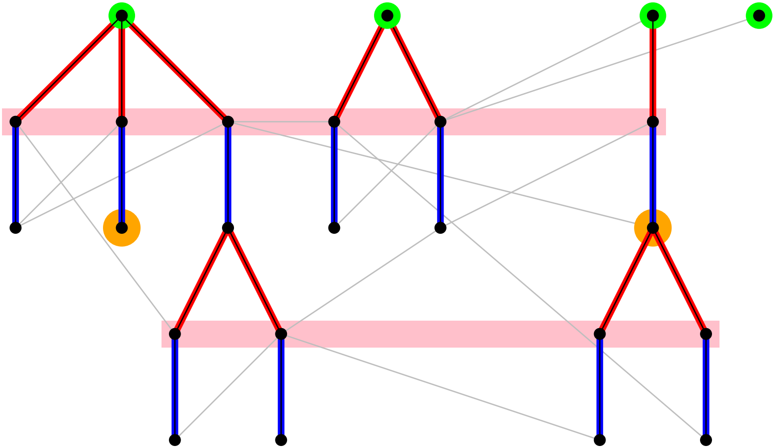
一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ





全体像

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ



ピンクの頂点数 ＝ 青の辺数

$$\underbrace{|M|}_{\text{青の辺数}} = \frac{1}{2}(\underbrace{|V| - o(G-U)}_{\text{ピンクの頂点数}} + \underbrace{|U|}_{\text{ピンクの頂点数}})$$

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム

入力：無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$ (例えば，$M := \emptyset$ とする)

1. $S :=$ M が飽和しない G の頂点全体の集合
2. S から G の頂点を幅優先探索する
   - 探索時に，M が飽和する頂点を新たに訪問したら，その頂点はキューに挿入せず，M の辺をたどって到達する頂点を挿入する
3. 増加道 P が見つかったら，縮約を解除し，$M := M \triangle P$ として最初に戻る
4. 花 C が見つかったら，$G := G/C$，$M := M/C$ として最初に戻る
5. 増加道も花も見つからなかったら，縮約を解除し，M を出力して終了

定理 (Edmonds '65)

一般グラフの最大マッチングは多項式時間で発見できる

目次

今日のまとめ

- 一般グラフの最大マッチングのアルゴリズム
- 重要概念 1：花
- 重要概念 2：グラフの縮約

次回の予告

線形計画法の復習

- 最小費用完全マッチング問題を解くための準備

目次

1. 復習：前回までの重要概念
2. 一般グラフにおける増加道の探索：アイディア
3. グラフの縮約と花
4. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム
5. 今日のまとめ と 次回の予告