離散最適化基礎論　第 2 回
二部グラフの最大マッチング

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 10 月 13 日

最終更新：2020 年 10 月 14 日　09:16

概要

主題

離散最適化のトピックの１つとしてマッチングを取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 重要な概念であるから
- 組合せ最適化の重要な技法を紹介できるから

スケジュール 前半 (予定)

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)

⋆ 祝日 のため 休み (11/3)

5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/24)

7. 整数計画法の復習 (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

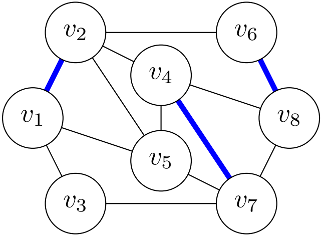
8. 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
- ⋆ 国際会議 のため 休み (12/15)
9. 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10. 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11. 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14. 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

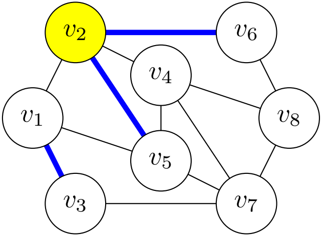
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：マッチング (matching)

G のマッチングとは辺部分集合 $M \subseteq E$ で,
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの



$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



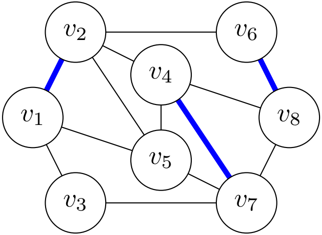
$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を飽和する

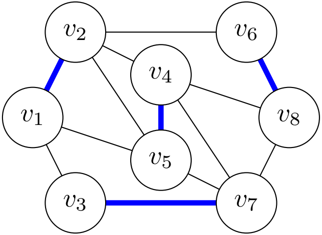
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：最大マッチング (maximum matching)

G の最大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない

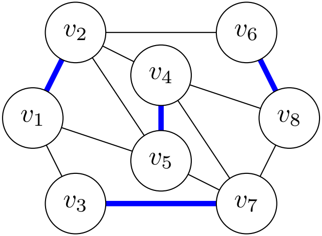


最大マッチングである

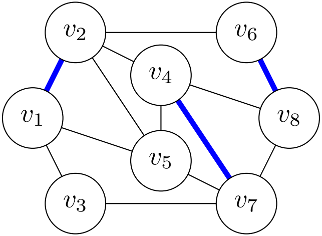
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：完全マッチング (perfect matching)

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの



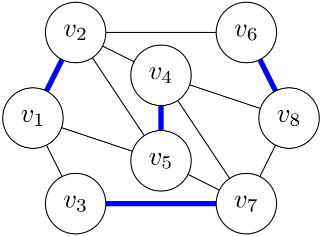
完全マッチングである



完全マッチングではない

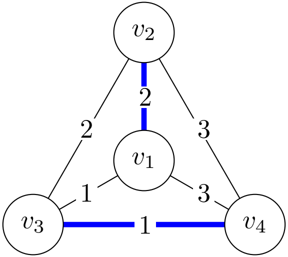
定義：最大マッチング問題

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の最大マッチング M (を 1 つ)



定義：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c\colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



二部グラフの 最大マッチング問題	$\rightarrow$	二部グラフの 最小費用完全マッチング問題
$\downarrow$		$\downarrow$
一般グラフの 最大マッチング問題	$\rightarrow$	一般グラフの 最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方 (多くの組合せ最適化問題に対して共通)

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 $\rightsquigarrow$ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

概要

今日の目標

二部グラフの最大マッチングに対する 3 つの定理を理解し，
使えるようになる

- Hall の結婚定理
- Kőnig–Ore の公式
- Kőnig–Egerváry の定理

重要な概念

- 弱双対性と強双対性 (最大最小定理)

目次

1. 二部グラフの完全マッチング
2. 二部グラフの最大マッチング：不足度
3. 二部グラフの最大マッチング：頂点被覆
4. 今日のまとめ と 次回の予告

無向グラフ $G = (V, E)$

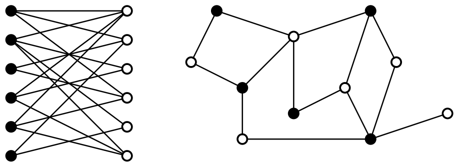
定義：二部グラフ (bipartite graph)

G が二部グラフであるとは，

- 頂点集合 V を 2 つの集合 A, B に分割できて
- どの辺 $e \in E$ も一端点を A に持ち，もう一端点を B に持つもの

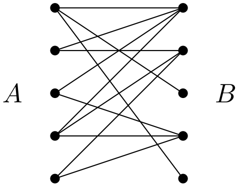
A と B を G の部集合と呼ぶ

二部グラフの例

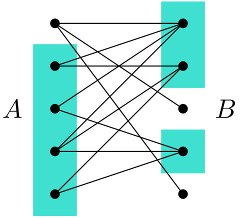


このとき，二部グラフを $G = (A, B, E)$ と表記することがある

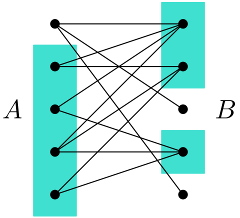
二部グラフが完全マッチングを持たないことの確認法？



二部グラフが完全マッチングを持たないことの確認法？



二部グラフが完全マッチングを持たないことの確認法？



- A の青い部分を飽和させるだけの頂点が B にない
- $\therefore$ このグラフは完全マッチングを持たない

今から証明すること

そのような部分がなければ，必ず完全マッチングを作れる

まずは用語の定義から⋯

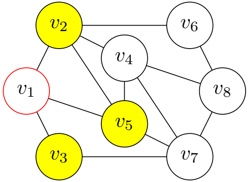
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の近傍とは
v の隣接頂点全体の集合

$$N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N_G(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N_G(v)\right) - S$$



- $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N_G(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

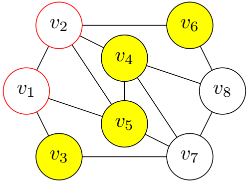
近傍とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ における頂点 $v \in V$ の近傍とは
v の隣接頂点全体の集合

$$N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

G における頂点集合 $S \subseteq V$ の近傍とは

$$N_G(S) = \left(\bigcup_{v \in S} N_G(v) \right) - S$$



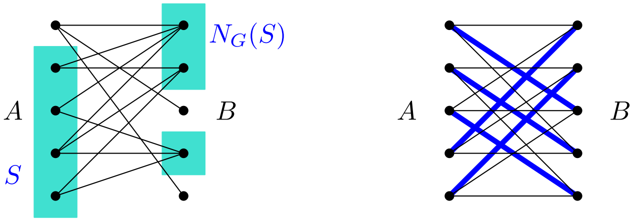
- $N_G(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}$
- $N_G(\{v_1, v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

二部グラフ $G = (A, B, E)$

Hall の結婚定理

G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ (結婚条件)

例：



注：$|A| = |B|$ のとき，結婚条件を満たせば，完全マッチングを持つ

Philip Hall
ホール
(1904–1982)

http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-marriage

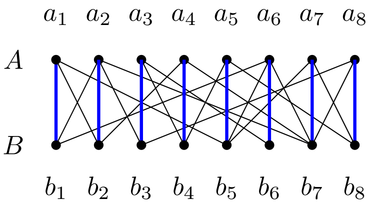
二部グラフ $G = (A, B, E)$

Hall の結婚定理

G が A を飽和するマッチングを持つ $\Leftrightarrow \forall\ S \subseteq A\colon\ |S| \leq |N_G(S)|$

必要性の証明：G が A を飽和するマッチング M を持つと仮定

- $M = \{\{a_i, b_i\} \mid a_i \in A, b_i \in B, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ とする



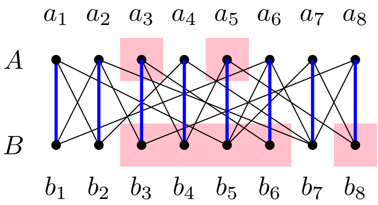
二部グラフ $G = (A, B, E)$

Hall の結婚定理

G が A を飽和するマッチングを持つ $\Leftrightarrow \forall\ S \subseteq A\colon\ |S| \leq |N_G(S)|$

<u>必要性の証明</u>：G が A を飽和するマッチング M を持つと仮定

- $M = \{\{a_i, b_i\} \mid a_i \in A, b_i \in B, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ とする
- 任意の $S \subseteq A$ は $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ を使って $S = \{a_i \mid i \in I\}$ と書ける



$$\begin{aligned} I &= \{3, 5\} \\ S &= \{a_3, a_5\} \\ N_G(S) &= \{b_3, b_4, b_5, b_6, b_8\} \end{aligned}$$

Hall の結婚定理：証明 (1)

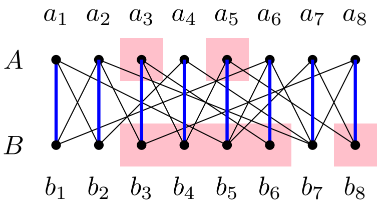
二部グラフ $G = (A, B, E)$

Hall の結婚定理

G が A を飽和するマッチングを持つ $\Leftrightarrow \forall\, S \subseteq A\colon\ |S| \le |N_G(S)|$

<u>必要性の証明</u>：G が A を飽和するマッチング M を持つと仮定

- $M = \{\{a_i, b_i\} \mid a_i \in A, b_i \in B, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ とする
- 任意の $S \subseteq A$ は $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ を使って $S = \{a_i \mid i \in I\}$ と書ける
- このとき，$N_G(S) \supseteq \{b_i \mid i \in I\}$
- $\therefore |S| = |I| \le |N_G(S)|$ $\square$



$$
\begin{aligned}
I &= \{3, 5\} \\
S &= \{a_3, a_5\} \\
N_G(S) &= \{b_3, b_4, b_5, b_6, b_8\}
\end{aligned}
$$

十分性の証明：$|A|$ に関する数学的帰納法 (累積帰納法)

証明すること：任意の自然数 $n \geq 1$ について次を証明

$|A| = n$ であるような任意の二部グラフ $G = (A, B, E)$ に対して
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ (結婚条件)
$\Rightarrow$ G が A を飽和するマッチングを持つ

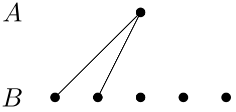
十分性の証明：$|A|$ に関する数学的帰納法 (累積帰納法)

証明すること：任意の自然数 $n \geq 1$ について次を証明

$|A| = n$ であるような任意の二部グラフ $G = (A, B, E)$ に対して
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ (結婚条件)
$\Rightarrow G$ が A を飽和するマッチングを持つ

$n = 1$ のとき：$|B| = m$，$|N_G(A)| = m'$ とする

- G は結婚条件を満たすので，$m' \geq 1$
- $\therefore G$ は A を飽和するマッチングを持つ



$m = 5, m' = 2$

任意の自然数 $k \geq 1$ を考える

帰納法の仮定

任意の自然数 $\ell \leq k$ に対して，
$|A| = \ell$ であるような任意の二部グラフ $G = (A, B, E)$ に対して
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ (結婚条件)
$\Rightarrow$ G が A を飽和するマッチングを持つ

帰納法で導くこと

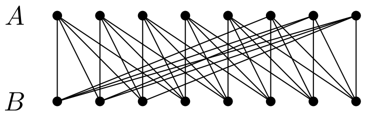
$|A| = k+1$ であるような任意の二部グラフ $G = (A, B, E)$ に対して
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ (結婚条件)
$\Rightarrow$ G が A を飽和するマッチングを持つ

- $|A| = k+1$ であるような任意の二部グラフ $G = (A, B, E)$ を考える
- 2 通りに場合分け

場合 1

すべての非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)| - 1$

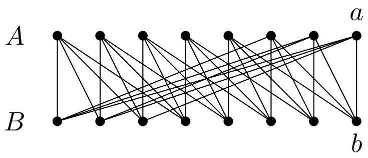
- $\{a, b\}$ を G の任意の辺とする (ただし，$a \in A$, $b \in B$)



場合 1

すべての非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)| - 1$

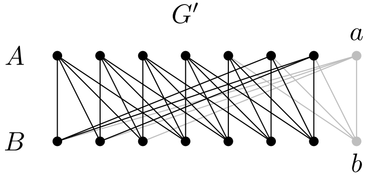
- $\{a, b\}$ を G の任意の辺とする (ただし，$a \in A$, $b \in B$)



場合 1

すべての非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)| - 1$

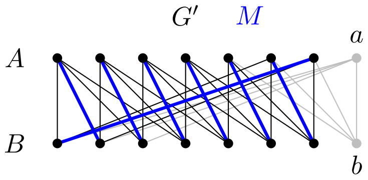
- $\{a, b\}$ を G の任意の辺とする (ただし，$a \in A$, $b \in B$)
- G から頂点 a と b を除去したグラフを G' とする
- G' は結婚条件を満たす (次のページ)



場合 1

すべての非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)| - 1$

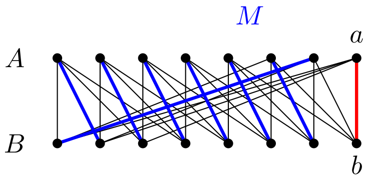
- $\{a, b\}$ を G の任意の辺とする (ただし，$a \in A$, $b \in B$)
- G から頂点 a と b を除去したグラフを G' とする
- G' は結婚条件を満たす (次のページ)
- 帰納法の仮定から，
  G' は $A - \{a\}$ を飽和するマッチング M を持つ



場合 1

すべての非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| \le |N_G(S)| - 1$

- $\{a, b\}$ を G の任意の辺とする (ただし，$a \in A$, $b \in B$)
- G から頂点 a と b を除去したグラフを G' とする
- G' は結婚条件を満たす (次のページ)
- 帰納法の仮定から，
  G' は $A - \{a\}$ を飽和するマッチング M を持つ
- $\therefore M \cup \{\{a, b\}\}$ は A を飽和するマッチングである



場合 1

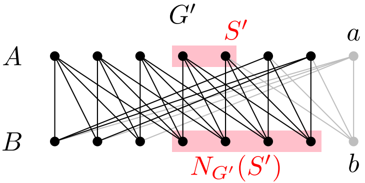
すべての非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)| - 1$

なぜ，G' は結婚条件を満たすのか？

- 任意の非空な $S' \subseteq A - \{a\}$ を考える
- このとき，$N_{G'}(S') \cup \{b\} \supseteq N_G(S')$ なので，

$$|N_{G'}(S')| + 1 \geq |N_G(S')| \geq |S'| + 1$$

- $\therefore |N_{G'}(S')| \geq |S'|$



場合 1

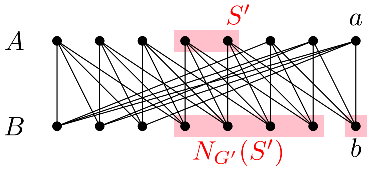
すべての非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)| - 1$

なぜ，G' は結婚条件を満たすのか？

- 任意の非空な $S' \subseteq A - \{a\}$ を考える
- このとき，$N_{G'}(S') \cup \{b\} \supseteq N_G(S')$ なので，

$$|N_{G'}(S')| + 1 \geq |N_G(S')| \geq |S'| + 1$$

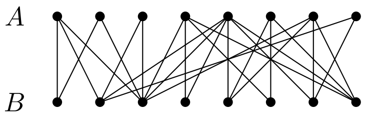
- $\therefore |N_{G'}(S')| \geq |S'|$



場合 2

ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

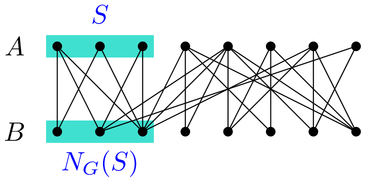
- そのような S を考える
- G を $S \cup N_G(S)$ に制限したグラフを G' とする
- G を $(A - S) \cup (B - N_G(S))$ に制限したグラフを G'' とする
- G' と G'' は結婚条件を満たす (次のページ)
- 帰納法の仮定から，
  G', G'' は $S, A - S$ を飽和するマッチング M', M'' を持つ
- $M' \cup M''$ は A を飽和する完全マッチングである



場合 2

ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

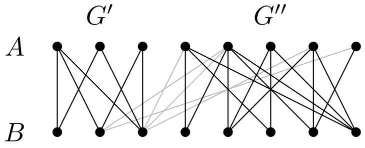
- そのような S を考える
- G を $S \cup N_G(S)$ に制限したグラフを G' とする
- G を $(A - S) \cup (B - N_G(S))$ に制限したグラフを G'' とする
- G' と G'' は結婚条件を満たす (次のページ)
- 帰納法の仮定から，
  G', G'' は $S, A - S$ を飽和するマッチング M', M'' を持つ
- $M' \cup M''$ は A を飽和する完全マッチングである



場合 2

ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

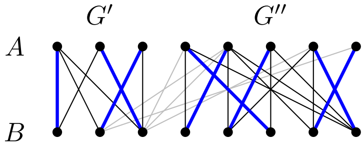
- そのような S を考える
- G を $S \cup N_G(S)$ に制限したグラフを G' とする
- G を $(A - S) \cup (B - N_G(S))$ に制限したグラフを G'' とする
- G' と G'' は結婚条件を満たす (次のページ)
- 帰納法の仮定から，
  G', G'' は $S, A - S$ を飽和するマッチング M', M'' を持つ
- $M' \cup M''$ は A を飽和する完全マッチングである



場合 2

ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

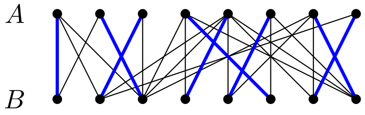
- そのような S を考える
- G を $S \cup N_G(S)$ に制限したグラフを G' とする
- G を $(A - S) \cup (B - N_G(S))$ に制限したグラフを G'' とする
- G' と G'' は結婚条件を満たす　　　　(次のページ)
- 帰納法の仮定から，
  G', G'' は $S, A - S$ を飽和するマッチング M', M'' を持つ
- $M' \cup M''$ は A を飽和する完全マッチングである



場合 2

ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

- そのような S を考える
- G を $S \cup N_G(S)$ に制限したグラフを G' とする
- G を $(A - S) \cup (B - N_G(S))$ に制限したグラフを G'' とする
- G' と G'' は結婚条件を満たす　(次のページ)
- 帰納法の仮定から，
  G', G'' は $S, A - S$ を飽和するマッチング M', M'' を持つ
- $M' \cup M''$ は A を飽和する完全マッチングである

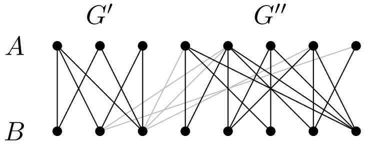


場合 2

ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

なぜ，G' は結婚条件を満たすのか？

- 任意の非空な $S' \subseteq S$ を考える
- このとき，$N_{G'}(S') = N_G(S')$
- G に対する結婚条件より，$|N_G(S')| \geq |S'|$
- $\therefore$，$|N_{G'}(S')| = |N_G(S')| \geq |S'|$

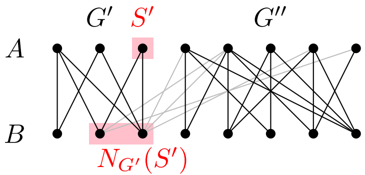


場合 2

ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

なぜ，G' は結婚条件を満たすのか？

- 任意の非空な $S' \subseteq S$ を考える
- このとき，$N_{G'}(S') = N_G(S')$
- G に対する結婚条件より，$|N_G(S')| \geq |S'|$
- $\therefore$，$|N_{G'}(S')| = |N_G(S')| \geq |S'|$



場合 2

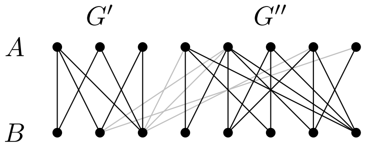
ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

なぜ，G'' は結婚条件を満たすのか？

- 任意の非空な $S'' \subseteq A - S$ を考える
- G に対する結婚条件より，$|N_G(S \cup S'')| \geq |S \cup S''|$
- また，$N_G(S \cup S'') = N_G(S) \cup N_{G''}(S'')$ が成り立つ
- したがって，

$$
\begin{aligned}
|S| + |N_{G''}(S'')| &= |N_G(S)| + |N_{G''}(S'')| \geq |N_G(S) \cup N_{G''}(S'')| \\
&\geq |N_G(S \cup S'')| \geq |S \cup S''| = |S| + |S''|
\end{aligned}
$$

- $\therefore |N_{G''}(S'')| \geq |S''|$ □



場合 2

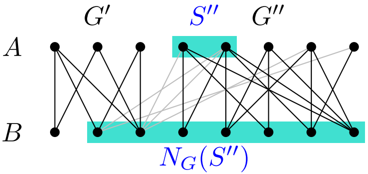
ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

なぜ，G'' は結婚条件を満たすのか？

- 任意の非空な $S'' \subseteq A - S$ を考える
- G に対する結婚条件より，$|N_G(S \cup S'')| \geq |S \cup S''|$
- また，$N_G(S \cup S'') = N_G(S) \cup N_{G''}(S'')$ が成り立つ
- したがって，

$$\begin{aligned} |S| + |N_{G''}(S'')| &= |N_G(S)| + |N_{G''}(S'')| \geq |N_G(S) \cup N_{G''}(S'')| \\ &\geq |N_G(S \cup S'')| \geq |S \cup S''| = |S| + |S''| \end{aligned}$$

- $\therefore |N_{G''}(S'')| \geq |S''|$ □



場合 2

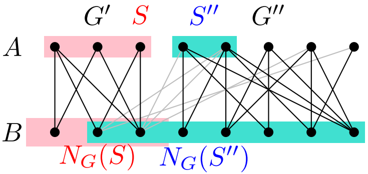
ある非空な $S \subsetneq A$ に対して，$|S| = |N_G(S)|$

なぜ，G'' は結婚条件を満たすのか？

- 任意の非空な $S'' \subseteq A - S$ を考える
- G に対する結婚条件より，$|N_G(S \cup S'')| \geq |S \cup S''|$
- また，$N_G(S \cup S'') = N_G(S) \cup N_{G''}(S'')$ が成り立つ
- したがって，

$$\begin{aligned} |S| + |N_{G''}(S'')| &= |N_G(S)| + |N_{G''}(S'')| \geq |N_G(S) \cup N_{G''}(S'')| \\ &\geq |N_G(S \cup S'')| \geq |S \cup S''| = |S| + |S''| \end{aligned}$$

- $\therefore |N_{G''}(S'')| \geq |S''|$ $\square$

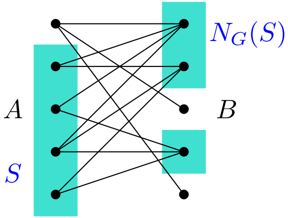


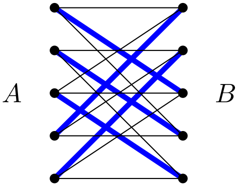
二部グラフ $G = (A, B, E)$

Hall の結婚定理

G が A の頂点をすべて飽和するマッチングを持つ $\Leftrightarrow$
任意の頂点集合 $S \subseteq A$ に対して，$|S| \leq |N_G(S)|$ (結婚条件)

例：

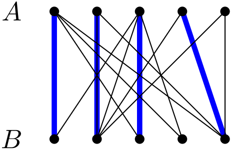




注：$|A| = |B|$ のとき，結婚条件を満たせば，完全マッチングを持つ

最大マッチングであることの確認法？

最大マッチングでないことは増加道の存在から分かる (前回)



最大マッチングであることはどうすれば分かるか？

今から証明すること

最大マッチングであることの確認法

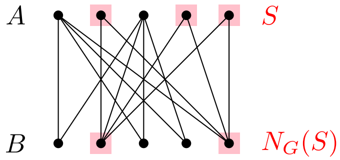
- 不足度に基づく方法
- 頂点被覆に基づく方法

まずは用語の定義から…

二部グラフ $G = (A, B, E)$

定義：不足度 (deficiency)

集合 $S \subseteq A$ の不足度とは，$|S| - |N_G(S)|$ のこと



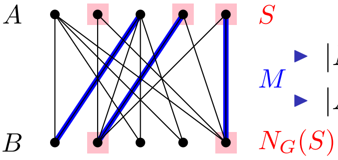
$|A| = |B|$ のとき，Hall の結婚定理より

- すべての $S \subseteq A$ に対して，不足度 ≤ 0
  $\Rightarrow G$ は完全マッチングを持つ
- ある $S \subseteq A$ に対して，不足度 > 0
  $\Rightarrow G$ は完全マッチングを持たない

二部グラフ $G = (A, B, E)$

性質：マッチングと不足度の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ S \subseteq A \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |A| - |S| + |N_G(S)|$



- $|M| = 3$
- $|A| - |S| + |N_G(S)| = 5 - 3 + 2 = 4$

二部グラフ $G = (A, B, E)$

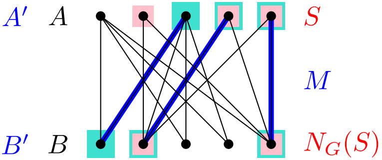
性質：マッチングと不足度の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ S \subseteq A \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |A| - |S| + |N_G(S)|$

証明：M が飽和する A, B の頂点全体の集合を A', B' とすると，

$$\begin{aligned} |M| &= |A'| = |S \cap A'| + |A' \setminus S| \leq |N_G(S) \cap B'| + |A \setminus S| \\ &\leq |N_G(S)| + |A \setminus S| = |N_G(S)| + |A| - |S| \end{aligned}$$

□

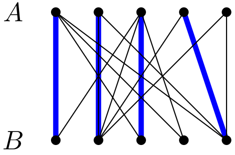


二部グラフ $G = (A, B, E)$

性質：マッチングと不足度の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ S \subseteq A \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |A| - |S| + |N_G(S)|$

次のマッチング M が存在する



このことから，

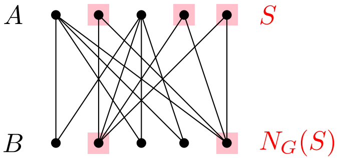
最大マッチングの辺数 ≥ 4

二部グラフ $G = (A, B, E)$

性質：マッチングと不足度の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ S \subseteq A \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |A| - |S| + |N_G(S)|$

次の集合 S を考える



弱双対性から，

$$\text{最大マッチングの辺数} \leq 5 - 3 + 2 = 4$$

すなわち，最大マッチングの辺数 $= 4$

二部グラフ $G = (A, B, E)$

性質：マッチングと不足度の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ S \subseteq A \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |A| - |S| + |N_G(S)|$

弱双対性の使い方

$|M| = |A| - |S| + |N_G(S)|$ となるような M と S によって，
M が最大マッチングであることを**証明できる**

問題点：そのような M と S があるか分からない

二部グラフ $G = (A, B, E)$

性質：マッチングと不足度の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ S \subseteq A \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |A| - |S| + |N_G(S)|$

弱双対性の使い方

$|M| = |A| - |S| + |N_G(S)|$ となるような M と S によって，
M が最大マッチングであることを証明できる

問題点：そのような M と S があるか分からない

今から行うこと

そのような M と S が必ず存在する という定理 (強双対性)

二部グラフ $G = (A, B, E)$

定理：Kőnig–Ore の公式

G の最大マッチング M に対して，

$$|M| = \min\{|A| - |S| + |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$$

このような定理を最大最小定理 (min-max theorem) と呼ぶ

- 任意の M, S に対して，$f(M) \leq g(S)$ (弱双対性)
- ある M, S に対して，$f(M) = g(S)$ (強双対性)

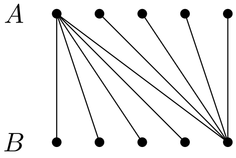
Kőnig–Ore の定理では，$f(M) = |M|, g(S) = |A| - |S| + |N_G(S)|$

証明のアイディア

- 弱双対性から「$\leq$」は成り立つので,「$\geq$」を証明する
- そのために Hall の結婚定理を用いる

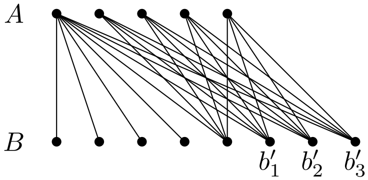
証明：$d = \max\{|S| - |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$ とする

- 次のように二部グラフ $G' = (A, B', E')$ を構成する
  - $B' = B \cup \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_d\}$
  - $E' = E \cup \{\{a, b'_i\} \mid a \in A, i \in \{1, 2, \ldots, d\}\}$
- G' は A を飽和するマッチング M' を持つ (次のページ)
- M' から B の頂点を飽和するものだけ集めて，M とする
- このとき，
  $|M| \geq |M'| - d = |A| - d = \min\{|A| - |S| + |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$



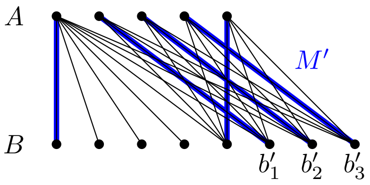
証明：$d = \max\{|S| - |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$ とする

- 次のように二部グラフ $G' = (A, B', E')$ を構成する
  - $B' = B \cup \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_d\}$
  - $E' = E \cup \{\{a, b'_i\} \mid a \in A, i \in \{1, 2, \ldots, d\}\}$
- G' は A を飽和するマッチング M' を持つ (次のページ)
- M' から B の頂点を飽和するものだけ集めて，M とする
- このとき，
  $|M| \geq |M'| - d = |A| - d = \min\{|A| - |S| + |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$



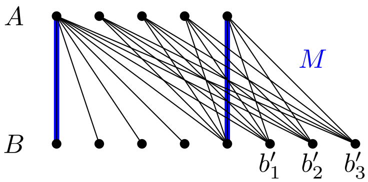
証明：$d = \max\{|S| - |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$ とする

- 次のように二部グラフ $G' = (A, B', E')$ を構成する
  - $B' = B \cup \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_d\}$
  - $E' = E \cup \{\{a, b'_i\} \mid a \in A, i \in \{1, 2, \ldots, d\}\}$
- G' は A を飽和するマッチング M' を持つ　　(次のページ)
- M' から B の頂点を飽和するものだけ集めて，M とする
- このとき，
  $|M| \geq |M'| - d = |A| - d = \min\{|A| - |S| + |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$



証明：$d = \max\{|S| - |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$ とする

- 次のように二部グラフ $G' = (A, B', E')$ を構成する
  - $B' = B \cup \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_d\}$
  - $E' = E \cup \{\{a, b'_i\} \mid a \in A, i \in \{1, 2, \ldots, d\}\}$
- G' は A を飽和するマッチング M' を持つ　　　　(次のページ)
- M' から B の頂点を飽和するものだけ集めて，M とする
- このとき，
  $|M| \geq |M'| - d = |A| - d = \min\{|A| - |S| + |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$



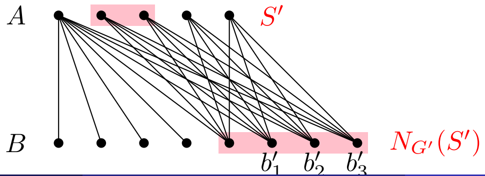
G' が結婚条件を満たすことを確認する

G' に対する結婚条件

任意の $S' \subseteq A$ に対して，$|S'| \leq |N_{G'}(S')|$

任意の $S' \subseteq A$ を考える

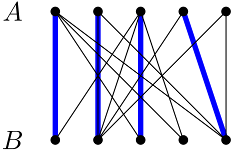
- $b'_1, b'_2, \ldots, b'_d$ は S' の頂点と隣接するので
$$|N_{G'}(S')| = |N_G(S')| + d = |N_G(S')| + \max\{|S| - |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$$
- したがって，
$$\begin{aligned} |S'| - |N_{G'}(S')| &= |S'| - |N_G(S')| - \max\{|S| - |N_G(S)| \mid S \subseteq A\} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$



目次

最大マッチングであることの確認法？: 再掲

最大マッチングでないことは増加道の存在から分かる　(前回)



最大マッチングであることはどうすれば分かるか？

今から証明すること

最大マッチングであることの確認法

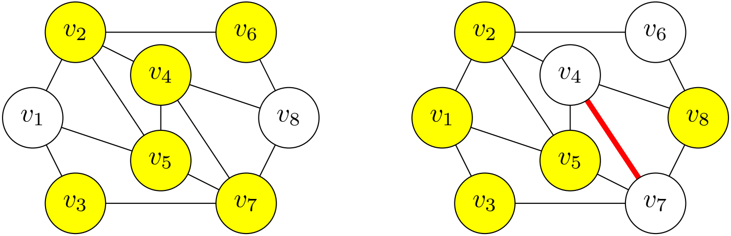
- 不足度に基づく方法 (済)
- 頂点被覆に基づく方法

まずは用語の定義から…

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：頂点被覆とは？

G の頂点被覆とは頂点部分集合 $C \subseteq V$ で，
G のどの辺も C のある頂点に接続しているもの



$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ は
頂点被覆である

$\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$ は
頂点被覆ではない

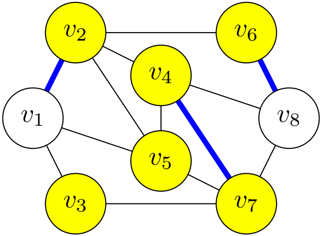
頂点被覆の頂点は，それに接続する辺を覆う (被覆する)

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ G \text{ の頂点被覆 } C \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |C|$

例：$|M| = 3$, $|C| = 6$

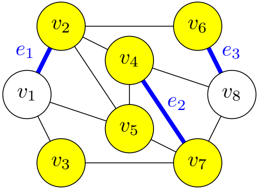


$\boxed{\text{注}}$：これは二部グラフでなくても成り立つ

証明：二重の数え上げ (double counting) による

- $I = \{(e, v) \in M \times C \mid v$ は e の端点 $\}$ の要素数 $|I|$ を考える
- C は頂点被覆なので，
  任意の $e \in M$ に対して，$(e, v) \in I$ となる $v \in C$ は 1 つ以上ある
- したがって，

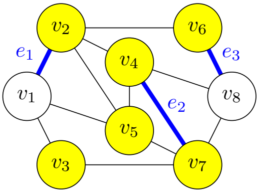
$$|I| \geq \sum_{e \in M} 1 = |M|$$



$$I = \{(e_1, v_2), (e_2, v_4), (e_2, v_7), (e_3, v_6)\}$$

証明 (続き)：二重の数え上げ (double counting) による

- $I = \{(e, v) \in M \times C \mid v$ は e の端点 $\}$ の要素数 $|I|$ を考える
- M はマッチングなので，
  任意の $v \in C$ に対して，$(e, v) \in I$ となる $e \in M$ は 1 つ以下しかない
- したがって，
$$|I| \leq \sum_{v \in C} 1 = |C|$$
- $\therefore |M| \leq |I| \leq |C|$ □



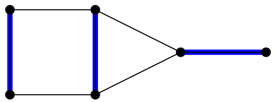
$$I = \{(e_1, v_2), (e_2, v_4), (e_2, v_7), (e_3, v_6)\}$$

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ G \text{ の頂点被覆 } C \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |C|$

次のマッチング M が存在する



このことから，

$$\text{最大マッチングの辺数} \geq 3$$

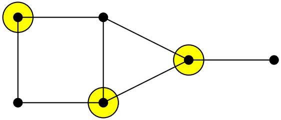
マッチングと頂点被覆の関係：弱双対性 (使い方 (2))

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ G \text{ の頂点被覆 } C \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |C|$

次の頂点被覆 C が存在する



弱双対性から

$$\text{最大マッチングの辺数} \leq 3$$

したがって，最大マッチングの辺数 $= 3$

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ G \text{ の頂点被覆 } C \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |C|$

弱双対性の使い方

$|M| = |C|$ となるような M と C によって，
M が最大マッチングであることを証明できる

問題点：そのような M と C があるか分からない

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：マッチングと頂点被覆の弱双対性

$\left.\begin{array}{l} G \text{ のマッチング } M \\ G \text{ の頂点被覆 } C \end{array}\right\}$ に対して，$|M| \leq |C|$

弱双対性の使い方

$|M| = |C|$ となるような M と C によって，
M が最大マッチングであることを証明できる

問題点：そのような M と C があるか分からない

今から行うこと

二部グラフには
そのような M と C が必ず存在する という定理 (強双対性)

二部グラフ $G = (A, B, E)$

定理：Kőnig–Egerváry の定理

G の最大マッチング M と最小頂点被覆 C に対して，$|M| = |C|$

このような定理を最大最小定理 (min-max theorem) と呼ぶ

二部グラフ $G = (A, B, E)$

定理：Kőnig–Egerváry の定理

G の最大マッチング M と最小頂点被覆 C に対して，$|M| = |C|$

このような定理を最大最小定理 (min-max theorem) と呼ぶ

証明のアイディア

- 弱双対性から「$\leq$」は成り立つので，「$\geq$」を証明する
- そのために Kőnig–Ore の公式を用いる

復習：Kőnig–Ore の公式

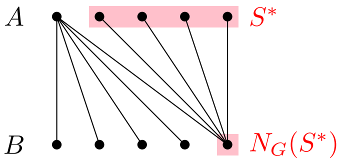
G の最大マッチング M に対して，

$$|M| = \min\{|A| - |S| + |N_G(S)| \mid S \subseteq A\}$$

証明：$|A| - |S| + |N_G(S)|$ を最小化する A の部分集合を S^* とする

- このとき，$(A - S^*) \cup N_G(S^*)$ は G の頂点被覆である (次のページ)
- したがって，Kőnig–Ore の公式から

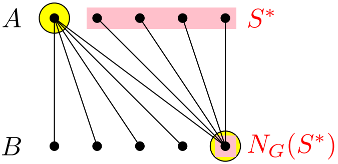
$$\begin{aligned} \text{最大マッチングの辺数} &= |A| - |S^*| + |N_G(S^*)| \\ &\geq \text{最小頂点被覆の頂点数} \end{aligned}$$



証明：$|A| - |S| + |N_G(S)|$ を最小化する A の部分集合を S^* とする

- このとき，$(A - S^*) \cup N_G(S^*)$ は G の頂点被覆である (次のページ)
- したがって，Kőnig–Ore の公式から

$$
\begin{aligned}
\text{最大マッチングの辺数} &= |A| - |S^*| + |N_G(S^*)| \\
&\geq \text{最小頂点被覆の頂点数}
\end{aligned}
$$

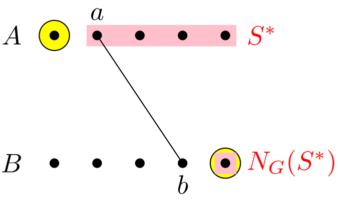


証明すべきこと

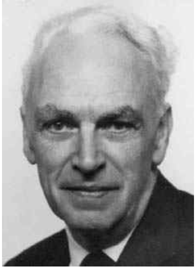
$(A - S^*) \cup N_G(S^*)$ は G の頂点被覆である

証明：背理法で証明する

- $(A - S^*) \cup N_G(S^*)$ が G の頂点被覆ではないと仮定する
- ある辺 $\{a, b\} \in E$ に対して，$a \in S^*$ と $b \notin N_G(S^*)$ が成り立つ
- しかし，$a \in S^*$ と $\{a, b\} \in E$ より，$b \in N_G(S^*)$ である
- $b \notin N_G(S^*)$ と $b \in N_G(S^*)$ は互いに矛盾する □



Dénes Kőnig
ケーニグ
(1894–1944)



Øystein Ore
オーレ (オア)
(1899–1968)

Jenő Egerváry
エゲルヴァーリ
(1891–1958)

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-marriage

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ore/

https://web.cs.elte.hu/egres/www/intro.html

目次

今日のまとめ

今日の目標

二部グラフの最大マッチングに対する 3 つの定理を理解し，
使えるようになる

- Hall の結婚定理
- Kőnig–Ore の公式
- Kőnig–Egerváry の定理

重要な概念

- 弱双対性と強双対性 (最大最小定理)

次回予告

二部グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム

- 増加道の発見法
- 最適性の保証法
- (時間があれば) 高速化の手法

目次

1. 二部グラフの完全マッチング
2. 二部グラフの最大マッチング：不足度
3. 二部グラフの最大マッチング：頂点被覆
4. 今日のまとめ と 次回の予告