離散最適化基礎論　第 1 回
マッチングの用語

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 10 月 6 日

最終更新：2020 年 10 月 7 日　00:58

概要

主題

離散最適化のトピックの１つとしてマッチングを取り上げ,
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- 重要な概念であるから
- 組合せ最適化の重要な技法を紹介できるから

スケジュール 前半 (予定)

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)

- ⋆ 祝日 のため 休み (11/3)

5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)

- ⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/24)

7. 整数計画法の復習 (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
★ 国際会議 のため 休み (12/15)
9 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2020/matching/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義前日の夕方 18 時までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2020/matching/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの

授業の進め方

$\boxed{\text{講義}}$ (85 分)

- スライドで進める
- 質問は CommentScreen で

$\boxed{\text{退室}}$ (5 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を Google Forms で提出する
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

$\boxed{\text{オフィスアワー}}$ (アポイントメントによる)

- 質問など

評価

2 回のレポート**のみ**による

- レポート 1 (50 点満点)
  - 要項説明：12 月 8 日 (火)
  - 提出締切：12 月 23 日 (水)
- レポート 2 (50 点満点)
  - 要項説明：1 月 19 日 (火)
  - 提出締切：2 月 10 日 (水)

要項説明 は 講義 web ページ でも行う

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- B. Korte, J. Vygen, Combinatorial Optimization, 6th Edition, Springer, 2018.
- W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, A. Schrijver, Combinatorial Optimization, Wiley-Interscience, 1997.
- C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz, Combinatorial Optimization Algorithms and Complexity, Dover, 1998.
- L. Lovász, M. Plummer, Matching Theory, AMS, 2009.

その他，研究論文

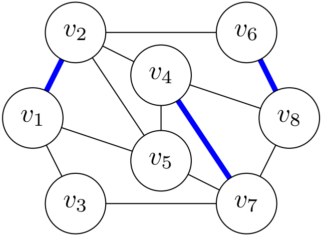
目次

グラフにおけるマッチング

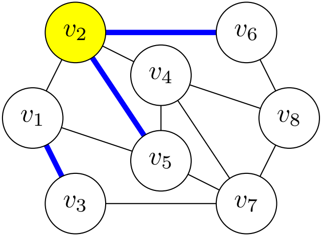
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：マッチング (matching)

G の**マッチング**とは辺部分集合 $M \subseteq E$ で,
M のどの 2 辺も同じ頂点に接続しないもの

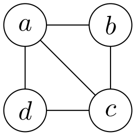


$\{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_7\}, \{v_6, v_8\}\}$ は
マッチングである



$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}\}$ は
マッチングではない

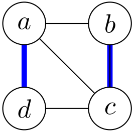
マッチングの辺 $e \in M$ は e の端点を**飽和**する



このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a, b\}\}$
- $\{\{a, c\}\}$
- $\{\{a, d\}\}$
- $\{\{b, c\}\}$
- $\{\{c, d\}\}$
- $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$

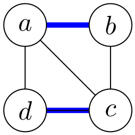
グラフにおけるすべてのマッチング



このグラフのマッチングは以下のもの

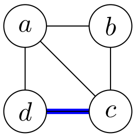
- $\emptyset$
- $\{\{a,b\}\}$
- $\{\{a,c\}\}$
- $\{\{a,d\}\}$
- $\{\{b,c\}\}$
- $\{\{c,d\}\}$
- $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$
- $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$

グラフにおけるすべてのマッチング



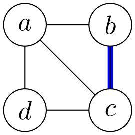
このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a,b\}\}$
- $\{\{a,c\}\}$
- $\{\{a,d\}\}$
- $\{\{b,c\}\}$
- $\{\{c,d\}\}$
- $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$
- $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$



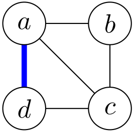
このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a, b\}\}$
- $\{\{a, c\}\}$
- $\{\{a, d\}\}$
- $\{\{b, c\}\}$
- $\{\{c, d\}\}$
- $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$



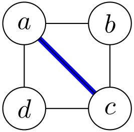
このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a,b\}\}$
- $\{\{a,c\}\}$
- $\{\{a,d\}\}$
- $\{\{b,c\}\}$
- $\{\{c,d\}\}$
- $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$
- $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$



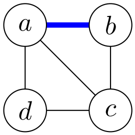
このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a,b\}\}$
- $\{\{a,c\}\}$
- $\{\{a,d\}\}$
- $\{\{b,c\}\}$
- $\{\{c,d\}\}$
- $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$
- $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$



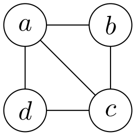
このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a, b\}\}$
- $\{\{a, c\}\}$
- $\{\{a, d\}\}$
- $\{\{b, c\}\}$
- $\{\{c, d\}\}$
- $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$



このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a,b\}\}$
- $\{\{a,c\}\}$
- $\{\{a,d\}\}$
- $\{\{b,c\}\}$
- $\{\{c,d\}\}$
- $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$
- $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$



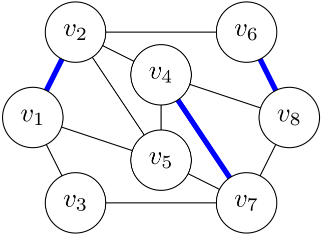
このグラフのマッチングは以下のもの

- $\emptyset$
- $\{\{a,b\}\}$
- $\{\{a,c\}\}$
- $\{\{a,d\}\}$
- $\{\{b,c\}\}$
- $\{\{c,d\}\}$
- $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$
- $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$

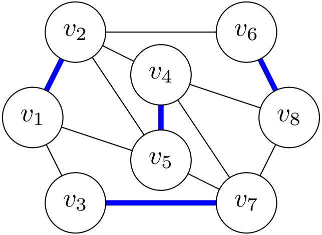
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：最大マッチング (maximum matching)

G の最大マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $|M| \geq |M'|$ を満たすもの



最大マッチングではない

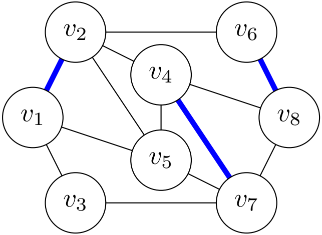


最大マッチングである

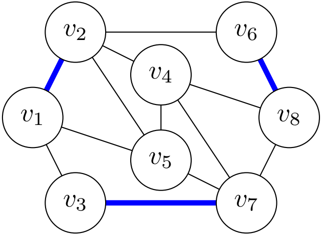
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：極大マッチング (maximal matching)

G の**極大マッチング**とは G のマッチング $M \subseteq E$ で,
任意の辺 $e \in E - M$ に対して $M \cup \{e\}$ が G のマッチングではないもの



極大マッチングである

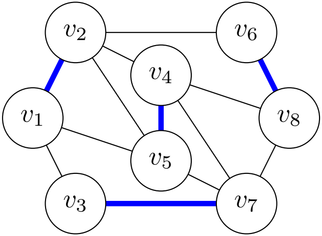


極大マッチングではない

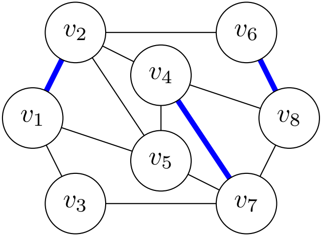
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：完全マッチング (perfect matching)

G の完全マッチングとは G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意の頂点に M のある辺が接続しているもの



完全マッチングである

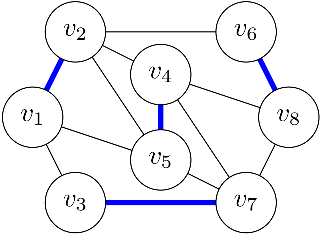


完全マッチングではない

無向グラフ $G = (V, E)$

観察

1. M が G の完全マッチング $\Rightarrow$ M は G の最大マッチング
2. M が G の最大マッチング $\Rightarrow$ M は G の極大マッチング

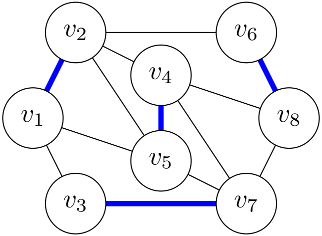


注：完全マッチングが必ず存在するとは限らない が，
最大マッチングと極大マッチングは必ず存在する

目次

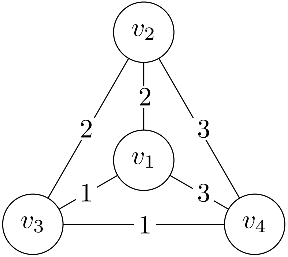
定義：最大マッチング問題

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の最大マッチング M (を 1 つ)



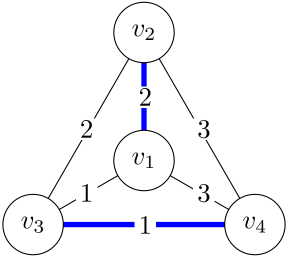
定義：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G=(V,E)$，非負辺費用関数 $c\colon E\to\mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



定義：最小費用完全マッチング問題 (minimum-cost perfect matching problem)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$，非負辺費用関数 $c \colon E \to \mathbb{R}$
- 出力：G の完全マッチング M で，辺費用和が最小のもの (を 1 つ)
  (完全マッチングが存在しない場合,「存在しない」と出力)



この講義が対象とする 4 つの問題

二部グラフの最大マッチング問題	→	二部グラフの最小費用完全マッチング問題
↓		↓
一般グラフの最大マッチング問題	→	一般グラフの最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

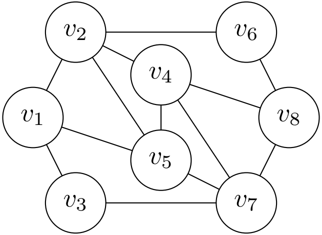
重要な考え方 (多くの組合せ最適化問題に対して共通)

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 $\rightsquigarrow$ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

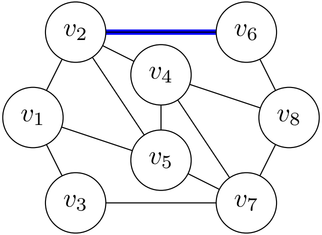
目次

1. 概要
2. この講義が対象とする問題
3. 最大マッチングと増加道
4. 今日のまとめ と 次回の予告

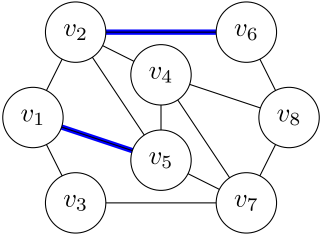
最大マッチングをどのように見つければよい？



辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない

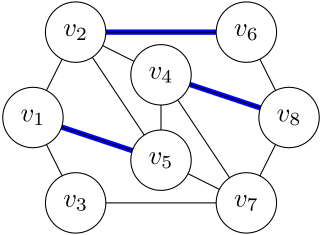


辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない



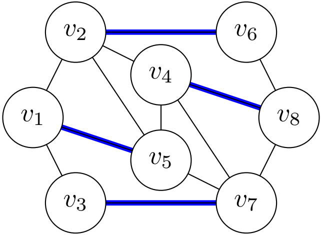
辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない

最大マッチングをどのように見つければよい？

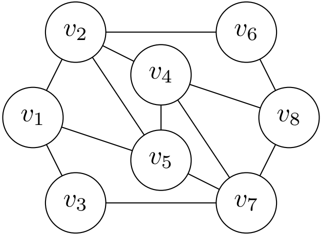


辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない

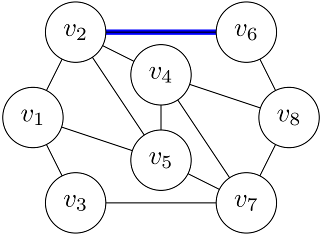
最大マッチングが見つかった



辺を 1 つずつ追加していくような方法では,
極大マッチングを見つけることはできるが,
最大マッチングを見つけられるとは限らない

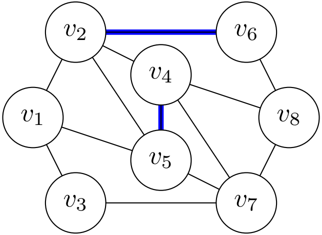


辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない



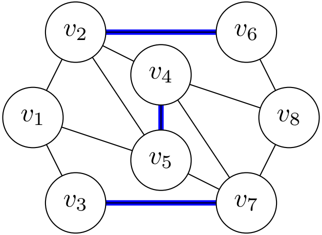
辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない

最大マッチングをどのように見つければよい？



辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない

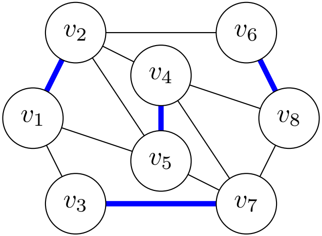
最大マッチングが見つからなかった



辺を 1 つずつ追加していくような方法では，
極大マッチングを見つけることはできるが，
最大マッチングを見つけられるとは限らない

最大性の確認法？

このマッチングが最大マッチングであることを確認するには
どうしたらよいか？



重要な考え方

発見法の前に確認法

「P vs NP 問題」と関係 $\rightsquigarrow$ 『計算理論』

重要な考え方 (再掲)

発見法の前に確認法

「P vs NP 問題」と関係 $\rightsquigarrow$ 『計算理論』

なぜ？

- 確認は発見より難しくない
- 確認法から発見法に対する道筋が見えることもある

ここからの内容：最大性の確認法

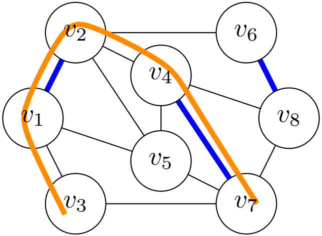
増加道を用いる方法

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：交互道 (alternating path)

M に関する交互道とは，G における道で，
M の辺と $E - M$ の辺が交互に現れるもの

交互道を交互路と呼ぶこともある



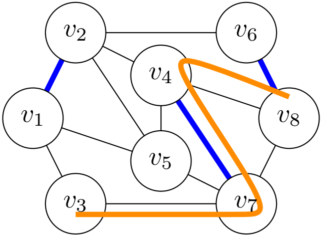
これ は 青のマッチング に関する交互道である

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：増加道 (augmenting path)

M に関する増加道とは，M に関する交互道で，
その両端点が M の辺と接続しないもの

増加道を増大道，増加路，増大路と呼ぶこともある



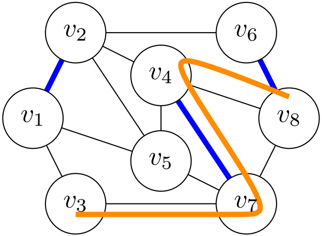
これ は 青のマッチング に関する増加道であるか？

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：増加道 (augmenting path)

M に関する**増加道**とは，M に関する交互道で，
その両端点が M の辺と接続しないもの

増加道を増大道，増加路，増大路と呼ぶこともある



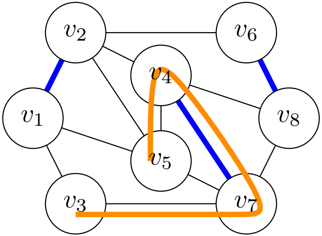
これ は 青のマッチング に関する増加道ではない

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：増加道 (augmenting path)

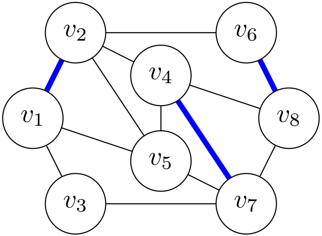
M に関する増加道とは，M に関する交互道で，
その両端点が M の辺と接続しないもの

増加道を増大道，増加路，増大路と呼ぶこともある



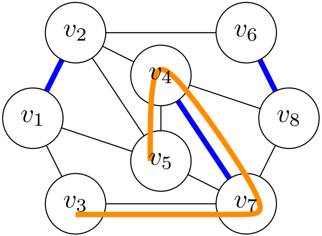
これ は 青のマッチング に関する増加道である

増加道に沿ってマッチングを大きくする



辺数 3 の
マッチング

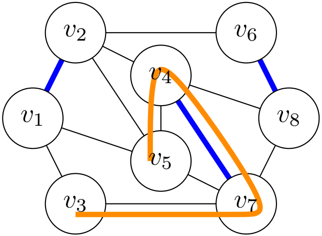
増加道に沿ってマッチングを大きくする

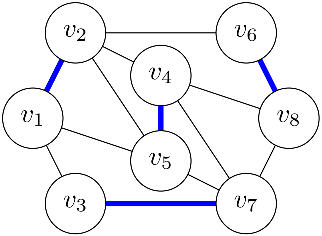


辺数 3 の
マッチング

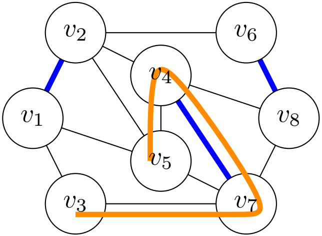
増加道

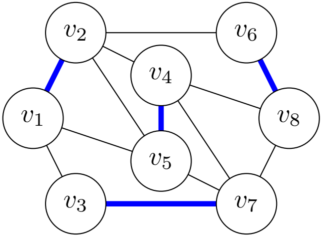
増加道に沿ってマッチングを大きくする





辺数 3 のマッチング $\rightsquigarrow$ 増加道に沿って大きくする $\rightsquigarrow$ 辺数 4 のマッチング



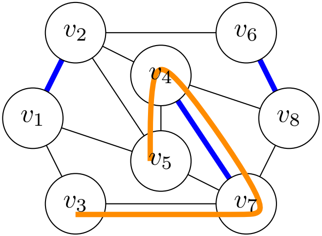


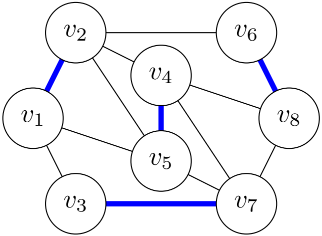
辺数 3 の マッチング $\rightsquigarrow$ 増加道に沿って大きくする $\rightsquigarrow$ 辺数 4 の マッチング

つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

増加道に沿ってマッチングを大きくする





辺数 3 の マッチング $\rightsquigarrow$ 増加道に沿って 大きくする $\rightsquigarrow$ 辺数 4 の マッチング

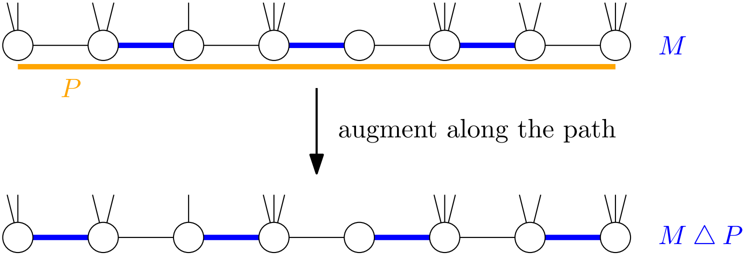
つまり

M に関する増加道が存在する $\Rightarrow$ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

M は最大マッチングである $\Rightarrow$ M に関する増加道が存在しない

増加道に沿ってマッチングを大きくする：一般的な説明



$\left.\begin{array}{l}\text{マッチング } M \\ M \text{ に関する増加道 } P\end{array}\right\}$ に対して，$M \triangle P$ もマッチング

定義：集合の対称差

$$X \triangle Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

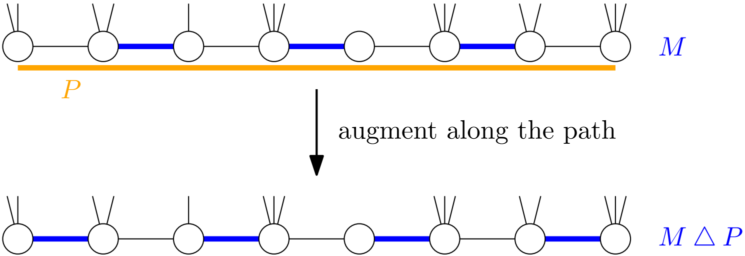
無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定理：最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M に関する増加道が存在しない

<u>「⇒」の証明</u>：対偶を証明する

- M に関する増加道 P が存在すると仮定する
- このとき，$M \triangle P$ は G のマッチングである
- $|M| < |M \triangle P|$ なので，M は G の最大マッチングではない □



無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定理：最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M に関する増加道が存在しない

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定

- $\therefore$ M に関する増加道が存在する $\square$

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

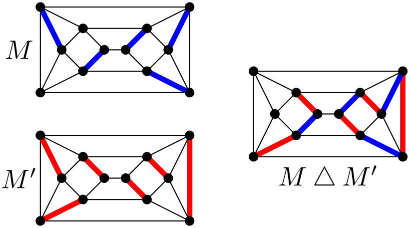
定理：最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M に関する増加道が存在しない

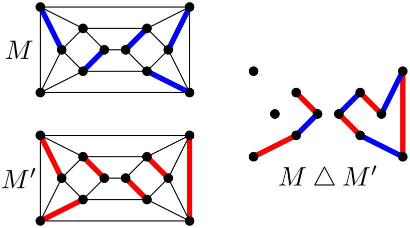
「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- …… $\leftarrow$ ここを今から埋めていく
- $\therefore$ M に関する増加道が存在する $\square$

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える

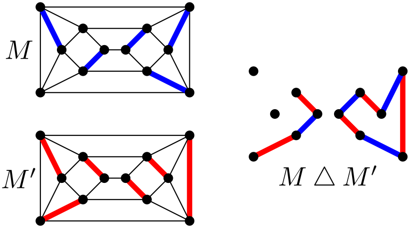


グラフ $(V, M \triangle M')$ の各頂点の次数は 0 か 1 か 2

このグラフ $(V, M \triangle M')$ の連結成分は何か？

- 次数 0 の頂点を持つ連結成分 $\rightsquigarrow$ 孤立点
- 次数 1 の頂点を持つ連結成分 $\rightsquigarrow$ 道
- 次数 2 の頂点だけから成る連結成分 $\rightsquigarrow$ 閉路
  - M と M' の辺が交互に現れるので，閉路の長さは偶数

M と M' の対称差 $M \triangle M'$ を考える



グラフ $(V, M \triangle M')$ の連結成分は孤立点か，道か，偶数長閉路である

このグラフ $(V, M \triangle M')$ の中の状況を考える

- 偶数長閉路において，M の辺の数 $=$ M' の辺の数
- $|M'| > |M|$ なので，
  ある道において，M の辺の数 $<$ M' の辺の数

この道は M に関する増加道!!!

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- $\therefore P$ は G において M に関する増加道である $\square$

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- グラフ $(V, M \triangle M')$ を考える

- $\therefore P$ は G において M に関する増加道である $\square$

「⇐」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- グラフ $(V, M \triangle M')$ を考える
  - 各頂点の次数は 2 以下であり，M の辺と M' の辺が交互に現れる
  - $\therefore$ 各連結成分は孤立点か，道か，偶数長閉路である
- $\therefore$ P は G において M に関する増加道である $\square$

「$\Leftarrow$」の証明：対偶を証明する

- M が G の最大マッチングではないと仮定
- M' を G の最大マッチングとする
- つまり，$|M'| > |M|$
- グラフ $(V, M \triangle M')$ を考える
  - 各頂点の次数は 2 以下であり，M の辺と M' の辺が交互に現れる
  - $\therefore$ 各連結成分は孤立点か，道か，偶数長閉路である
  - 偶数長閉路において，M の辺の数 $=$ M' の辺の数
  - $|M'| > |M|$ なので，ある道 P において M の辺の数 $<$ M' の辺の数
  - P の端点は M の辺に接続していない
- $\therefore$ P は G において M に関する増加道である $\square$

増加道で「山登り」ができる

増加道に基づく最大マッチング発見アルゴリズム (雛形)

- 入力：無向グラフ $G = (V, E)$
- 出力：G の最大マッチング M

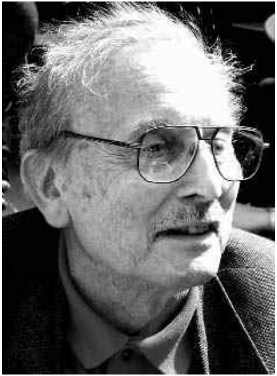
1. $M := \emptyset$ とする
2. while M に関する増加道 P が存在する do
   1. P に沿って M を大きくする
3. M を出力

先ほどの定理 (Berge) によって，
このアルゴリズムは必ず停止し，最大マッチングを出力することが分かる

気にしなくてはならないこと

どのように増加道 P を見つけるのか？

Claude Berge (クロード・ベルジュ，1926–2002)



https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Berge/

目次

今日のまとめ

重要概念

- マッチング，最大マッチング，完全マッチング
- 交互道，増加道

次回予告

二部グラフの最大マッチング

- 完全マッチングの存在性 (Hall の結婚定理)
- 最大最小定理 (Kőnig–Ore の定理，Kőnig–Egerváry の定理)

$\rightsquigarrow$ 組合せ最適化の初歩

目次