離散最適化基礎論　第 7 回
整数計画法の復習

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 12 月 1 日

最終更新：2020 年 12 月 4 日　22:30

スケジュール 前半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

この講義が対象とする 4 つの問題

二部グラフの最大マッチング問題	→	二部グラフの最小費用完全マッチング問題
↓		↓
一般グラフの最大マッチング問題	→	一般グラフの最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 ⇝ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

今日の目標

今日の目標

整数計画法における重要概念を復習する
- 緩和

線形計画法，整数計画法に関連する幾何学を復習する
- 凸包
- 凸多面体

目次

整数計画問題の例

整数計画問題 = 線形計画問題 + 整数制約

整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ & x_1 \in \{0,1\}, x_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

線形計画問題との違い
- 「各変数が 0 か 1 しか取らない」という制約がある

より正確には，「01 整数線形計画問題」と呼ばれる

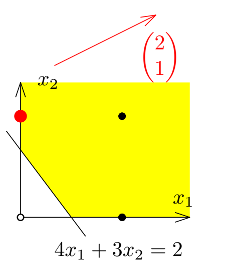
整数計画問題の例：図

整数計画問題の例

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

図を描いてみる
そして解いてみる：
- $x_1 = 0, x_2 = 1$ は最適解
- 最適値は 1



整数計画問題

整数計画問題 (integer program)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}\geq\text{」} \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

許容領域：$\{x \in \{0,1\}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$

目次

整数計画問題の線形計画緩和 (linear programming relaxation)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題：(IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

(IP) の線形計画緩和：(LP) これは線形計画問題

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

(IP) から整数制約を取り除く $\rightsquigarrow$ (LP) が得られる

整数計画問題の線形計画緩和：図

整数計画問題 (IP)

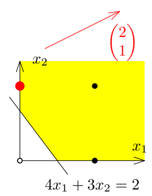
$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

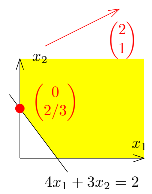
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \\ & x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 4x_1 + 3x_2 \geq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{array}$$





線形計画緩和の性質 1：LP の最適値は IP の最適値の下界

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

線形計画緩和の性質 1

(IP) の最適値 $\geq$ (LP) の最適値

証明：x_I^* を (IP) の最適解，x_L^* を (LP) の最適解とする

- (IP) の許容領域 $\subseteq$ (LP) の許容領域 なので，x_I^* は (LP) の許容解
- (LP) の最適解の定義から，$c^\top x_I^* \geq c^\top x_L^*$ □

線形計画緩和の性質 2：LP の最適解が IP の許容解ならば，それは IP の最適解

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

線形計画緩和の性質 2

(LP) の最適解 x_L^* が (IP) の許容解 $\Rightarrow$ x_L^* は (IP) の最適解

証明：x_I^* を (IP) の最適解とする

- 性質 1 より，$c^\top x_I^* \geq c^\top x_L^*$
- x_L^* が (IP) の許容解なので，(IP) の最適値の定義より，$c^\top x_I^* \leq c^\top x_L^*$
- $\therefore c^\top x_I^* = c^\top x_L^*$ であり，x_L^* も (IP) の最適解 □

線形計画緩和の性質：帰結 (1)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

整数計画問題 (IP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^m \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

線形計画緩和の性質：帰結 (2)

整数計画問題 (IP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^m \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

(DIP) の最適値 $\leq$ (DLP) の最適値 $=$ (LP) の最適値 $\leq$ (IP) の最適値

線形計画緩和の性質：帰結 (3)

整数計画問題 (IP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

線形計画緩和 (LP)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0, \end{array}$$

双対問題＋整数制約 (DIP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c, \\ & y \in \{0,1\}^m \end{array}$$

双対問題 (DLP)

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

(LP) の最適解 (の 1 つ) が (IP) の許容解で，
(DLP) の最適解 (の 1 つ) が (DIP) の許容解であるとき，

(DIP) の最適値 = (DLP) の最適値 = (LP) の最適値 = (IP) の最適値

線形計画緩和の使い方

線形計画緩和の性質：帰結

(LP) の最適解 (の 1 つ) が (IP) の許容解で，
(DLP) の最適解 (の 1 つ) が (DIP) の許容解であるとき，

(DIP) の最適値 = (DLP) の最適値 = (LP) の最適値 = (IP) の最適値

線形計画緩和の使い方 (次回の予告)

二部グラフに対して，重みが整数であるとき
- 最小重み完全マッチング問題を (IP) として記述する
- (LP) の最適値 = (IP) の最適値 となることを証明する
- ∴ (LP) を解けば，最小重み完全マッチング問題が解ける

- (LP) を解くときに，(DLP) を利用する
- その解き方から，同時に (DIP) も解けることが分かる

目次

今から行うこと

線形計画問題と整数計画問題を探究するためには，
幾何学的な直感や概念を活用することが重要

線形計画問題と整数計画問題に関連する幾何学的概念
- 凸多面体
- 凸包

今から行うことは，これらの紹介

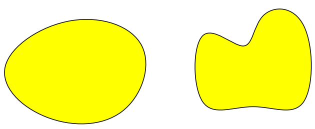
凸集合

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：凸集合

S が凸集合 (convex set) であるとは，次を満たすこと

任意の $p, q \in S$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して，$\lambda p + (1-\lambda) q \in S$



凸集合である　　凸集合ではない

注：凸集合ではない集合を 凹集合とは呼ばない

凸集合の例：半空間

凸集合の例

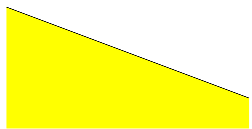
閉半空間 (closed halfspace) は凸集合

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \leq b\}$$

ただし，$a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$

∵ 任意の $p, q \in S$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して

$$a^\top(\lambda p + (1-\lambda) q) = \lambda a^\top p + (1-\lambda) a^\top q \leq \lambda b + (1-\lambda) b = b$$



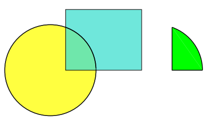
凸集合の重要な性質

$S, T \subseteq \mathbb{R}^n$

凸集合の重要な性質

S と T が凸集合 ⇒ $S \cap T$ も凸集合

証明は難しくない



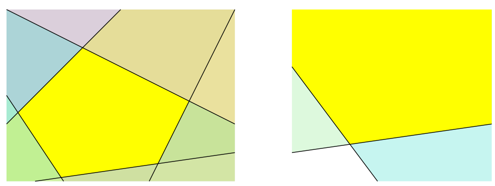
凸多面体

定義：凸多面体

凸多面体 (convex polyhedron) とは，有限個の閉半空間の共通部分

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ (この場合，m 個の閉半空間の共通部分)



注：凸多面体は空かもしれないし，非有界かもしれない

凸多面体は凸集合

定義：凸多面体

凸多面体 (convex polyhedron) とは，有限個の閉半空間の共通部分

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

ただし，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ (この場合，m 個の閉半空間の共通部分)

性質

凸多面体は凸集合

証明：
- 閉半空間は凸集合で，凸集合の共通部分は凸集合
- 凸多面体は閉半空間の共通部分だから，凸集合 □

線形計画問題の許容領域は凸多面体

線形計画問題 (LP)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{(LP) の許容領域} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, -Ax \leq -b, -x \leq 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

∴ (LP) の許容領域は凸多面体である

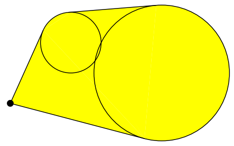
凸包

$S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：凸包

S の凸包 (convex hull) とは，S を含む最小の凸集合

$$\mathrm{conv}(S) = \bigcap_{T \supseteq S,\ T \text{ は凸}} T$$



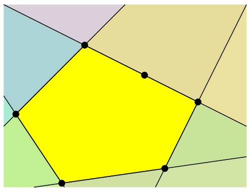
凸包の定義と凸集合の性質より，凸包は凸集合

凸包と凸多面体

$S \subseteq \mathbb{R}^n$

定理 (証明は省略)

S が有限集合 $\Rightarrow$ $\mathrm{conv}(S)$ は有界な凸多面体



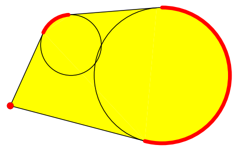
凸集合の端点

凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：端点

凸集合 S の端点 (extreme point) とは，次を満たす $x \in S$ のこと

$$\text{任意の } x', x'' \in S \text{ に対して，} x = \frac{x' + x''}{2} \Rightarrow x = x' = x''$$



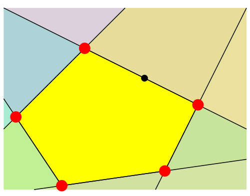
凸多面体の端点と連立方程式

凸多面体 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x \leq b_i\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}\}$ $(a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R})$

性質；凸多面体の端点と連立方程式

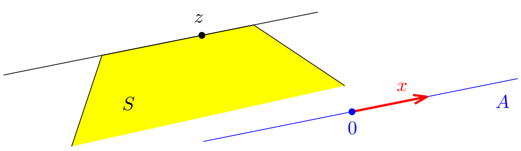
$z \in \mathbb{R}^n$ が S の端点 $\Rightarrow$

n 個の添え字 i に対して，$a_i^\top z = b_i$



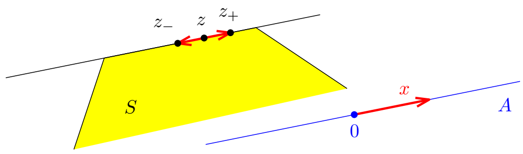
凸多面体の端点と連立方程式：証明

証明：$z \in \mathbb{R}^n$ が S の端点であると仮定する
- $a_i^\top z = b_i$ を満たす添え字 i 全体の集合を I とする．つまり，
  - 任意の $i \in I$ に対して，$a_i^\top z = b_i$
  - 任意の $i \notin I$ に対して，$a_i^\top z < b_i$
- 背理法：$|I| < n$ とする
- $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\top x = 0\ \forall i \in I\}$ とすると，A の次元は 1 以上
- したがって，0 ではない $x \in A$ が存在する



凸多面体の端点と連立方程式：証明

- 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して，$z_+ = z + \varepsilon x, z_- = z - \varepsilon x$ とすると
  - 任意の $i \in I$ に対して，$a_i^\top z_\pm = a_i^\top z \pm \varepsilon a_i^\top x = b_i$
  - 任意の $i \notin I$ に対して，$a_i^\top z_\pm = a_i^\top z \pm \varepsilon a_i^\top x < b_i$
- したがって，$z_\pm \in S$
- 一方で，$z = (z_+ + z_-)/2$ であるので，z は S の端点ではない (矛盾)
- ∴ $|I| \geq n$ □



凸多面体の端点と線形計画問題

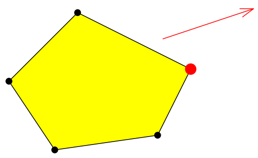
凸多面体 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$

性質：凸多面体の端点と線形計画問題

$z \in \mathbb{R}^n$ が S の端点 $\Rightarrow$
ある $c \in \mathbb{R}^n$ が存在し，z は次の線形計画問題の最適解

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax \leq b \end{array}$$

証明は省略



目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ

整数計画法における重要概念を復習する

- 緩和

線形計画法，整数計画法に関連する幾何学を復習する

- 凸包
- 凸多面体

次回の予告

二部グラフの最小費用完全マッチング問題に対して，
線形計画法と整数計画法の考え方を適用する