離散最適化基礎論　第 6 回
線形計画法の復習

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 11 月 17 日

最終更新：2020 年 11 月 19 日　14:31

スケジュール 前半 (予定)

1. マッチングの用語 (10/6)
2. 二部グラフの最大マッチング (10/13)
3. 二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム (10/20)
4. 一般グラフの最大マッチング (10/27)
- ⋆ 祝日 のため 休み (11/3)
5. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム (11/10)
6. 線形計画法の復習 (11/17)
- ⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/24)
7. 整数計画法の復習 (12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (12/8)
- ⋆ 国際会議 のため 休み (12/15)
9. 二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (12/22)
10. 一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法 (1/5)
11. 一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性 (1/12)
12. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要) (1/19)
13. 一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細) (1/26)
14. 予備 (2/2)

注意：予定の変更もありうる

この講義が対象とする 4 つの問題

二部グラフの最大マッチング問題	→	二部グラフの最小費用完全マッチング問題
↓		↓
一般グラフの最大マッチング問題	→	一般グラフの最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 ⇝ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

今日の目標

線形計画法における重要概念を復習する
- 線形計画法の双対定理
- 線形計画法の相補性定理

目次

線形計画問題の例

線形計画問題の例

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & 2x_1 + x_3 = 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0 \end{array}$$

読み方
- 「minimize」の後に書いてある関数を最小化する
- 「subject to」の後に書いてある式を満たす x_1, x_2, x_3 の中で

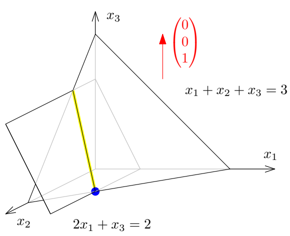
線形計画問題の例：図

線形計画問題の例

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & 2x_1 + x_3 = 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0 \end{array}$$

図を描いてみる
そして解いてみる：
- $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$ は最適解
- 最適値は 0



線形計画問題の例：用語

線形計画問題の例

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_3 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & 2x_1 + x_3 = 2, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- 目的関数 (objective function)：最小化したい関数
- 制約式 (制約) (constraint)：変数が満たさないといけない式
- 許容解 (feasible solution)：制約式をすべて満たす変数の値
- 許容領域 (feasible region)：許容解全体の集合

線形計画問題

線形計画問題 (linear program)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}\geq\text{」} \end{aligned}$$

先ほどの例：

- $m = 2$, $n = 3$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

線形計画問題の例：行列とベクトルで書いてみる

先ほどの例を行列とベクトルで書いてみる

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ \text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{許容領域} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_3 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

線形計画問題：別の表現

線形計画問題：別の表現

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax \leq b \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}\leq\text{」} \end{aligned}$$

制約は次の形であればよい

- 線形の等式
- 線形の (等号付き) 不等式

目的は次の形であればよい

- 線形関数の最大化
- 線形関数の最小化

標準形の線形計画問題

はじめに挙げた例は，標準形の線形計画問題である

標準形の線形計画問題 (linear program in standard form)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \quad \leftarrow \text{成分ごとに「}\geq\text{」} \end{aligned}$$

注：

- 論文や教科書によっては，別のものを標準形と呼ぶことがある

最適解と最適値

線形計画問題 (P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, x \geq 0 \end{aligned}$$

(P) の最適解と最適値とは？

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 (optimal solution) であるとは

(P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$c^\top x^* \geq c^\top x$

このとき，$c^\top x^*$ を (P) の最適値 (optimal value) と呼ぶ

注：「最適解」と「最適値」は明確に異なる概念

目次

線形計画問題の双対問題

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

線形計画問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^\top x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

(P) の双対問題：(D)　　これも線形計画問題

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & b^\top y \\ \text{subject to} \quad & A^\top y \leq c \end{aligned}$$

双対問題の「意味」は講義『数理計画法』を参照

線形計画問題の双対問題：例

線形計画問題 (P)

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_3 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & 2x_1 + x_3 = 2, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

(P) の双対問題 (D)

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ は変数

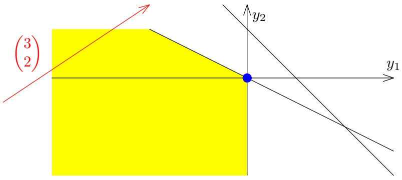
$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 3y_1 + 2y_2 \\ \text{subject to} & y_1 + 2y_2 \leq 0, \\ & y_1 \leq 0, \\ & y_1 + y_2 \leq 1 \end{array}$$

線形計画問題の双対問題：例 続き

(P) の双対問題 (D)

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 3y_1 + 2y_2 \\ \text{subject to} & y_1 + 2y_2 \leq 0, \\ & y_1 \leq 0, \\ & y_1 + y_2 \leq 1 \end{array}$$



- 最適解は $y_1 = 0, y_2 = 0$
- 最適値は 0

線形計画問題の弱双対定理

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

線形計画法の弱双対定理

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow b^\top y \leq c^\top x$

線形計画法の弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解であると仮定すると，
- $Ax = b$ かつ .... (1)
- $x \geq 0$ .... (2)

$y \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解であると仮定すると，
- $A^\top y \leq c$ .... (3)

したがって，

$$b^\top y \overset{(1)}{=} (Ax)^\top y = (x^\top A^\top)y = x^\top(A^\top y) \overset{(2),(3)}{\leq} x^\top c = c^\top x \qquad \square$$

注意

$s \in \mathbb{R}^k$ と $t \in \mathbb{R}^k$ に対して

$$s \geq 0 \text{ かつ } t \leq 0 \quad \Rightarrow \quad s^\top t \leq 0$$

線形計画法の弱双対定理：系

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow$ x^* は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$ 　　 y^* は (D) の最適解

系 (corollary)：定理から直ちに導かれる帰結

線形計画法の弱双対定理：系 — 証明 (1)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow$ x^* は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$ 　　 y^* は (D) の最適解

証明 (前半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする
- (P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$c^\top x^* \overset{\text{仮定}}{=} b^\top y^* \overset{\text{弱双対定理}}{\leq} c^\top x$
- したがって，x^* は (P) の最適解である

(P) の最適解とは？ (定義再掲)

(P) の許容解 $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解であるとは

(P) の任意の許容解 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$c^\top x^* \leq c^\top x$

線形計画法の弱双対定理：系 — 証明 (2)

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 $\Rightarrow$ x^* は (P) の最適解
$c^\top x^* = b^\top y^*$ 　　 y^* は (D) の最適解

証明 (後半)：x^* と y^* が仮定を満たすとする
- (D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^n$ を考える
- このとき，$b^\top y^* \overset{\text{仮定}}{=} c^\top x^* \overset{\text{弱双対定理}}{\geq} b^\top y$
- したがって，y^* は (D) の最適解である $\square$

(D) の最適解とは？ (定義再掲)

(D) の許容解 $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解であるとは

(D) の任意の許容解 $y \in \mathbb{R}^m$ に対して，$b^\top y^* \geq b^\top y$

線形計画法の強双対定理

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

線形計画法の強双対定理 (証明は省略)

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解
$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$

線形計画法の強双対定理：補足

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解，$y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 のとき

弱双対定理の系

$c^\top x^* = b^\top y^* \Rightarrow$ $x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 / $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解

つまり，目的関数値が一致するならば，それらは最適解

強双対定理

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 / $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$

つまり，最適解ならば，目的関数値は一致する

目次

線形計画法の相補性定理

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P)

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題：(D)

$y \in \mathbb{R}^m$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b^\top y \\ \text{subject to} & A^\top y \leq c \end{array}$$

相補性定理

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 / $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Leftrightarrow$

$Ax^* = b,\ x^* \geq 0$ (主許容性)
$A^\top y^* \leq c$ (双対許容性)
${x^*}^\top (c - A^\top y^*) = 0$ (相補性)

線形計画法の相補性定理：証明 (1)

相補性定理 (証明したい目標)

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 / $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Leftrightarrow$

$Ax^* = b,\ x^* \geq 0$ (主許容性)
$A^\top y^* \leq c$ (双対許容性)
${x^*}^\top (c - A^\top y^*) = 0$ (相補性)

「$\Rightarrow$」の証明：

- 最適解は許容解なので，主許容性と双対許容性が成り立つことはすぐわかる
- 以下，相補性を証明するために，強双対定理を使う

線形計画法の相補性定理：証明 (2)

相補性定理 (証明したい目標)

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 / $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Leftrightarrow$

$Ax^* = b,\ x^* \geq 0$ (主許容性)
$A^\top y^* \leq c$ (双対許容性)
${x^*}^\top (c - A^\top y^*) = 0$ (相補性)

「$\Rightarrow$」の証明 (続き)：

線形計画法の強双対定理

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 / $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Rightarrow c^\top x^* = b^\top y^*$

- ここで，

$$\begin{aligned} {x^*}^\top (c - A^\top y^*) &= {x^*}^\top c - {x^*}^\top A^\top y^* = c^\top x^* - (Ax^*)^\top y^* \\ &\overset{\text{主許容性}}{=} c^\top x^* - b^\top y^* \\ &\overset{\text{強双対定理}}{=} 0 \end{aligned}$$

線形計画法の相補性定理：証明 (3)

相補性定理 (証明したい目標)

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 / $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Leftrightarrow$

$Ax^* = b,\ x^* \geq 0$ (主許容性)
$A^\top y^* \leq c$ (双対許容性)
${x^*}^\top (c - A^\top y^*) = 0$ (相補性)

「$\Leftarrow$」の証明：弱双対定理の系を使う

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解 / $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の許容解 / $c^\top x^* = b^\top y^*$ $\Rightarrow$ x^* は (P) の最適解 / y^* は (D) の最適解

- つまり，$c^\top x^* = {x^*}^\top c \overset{\text{相補性}}{=} {x^*}^\top A^\top y^* = (Ax^*)^\top y^* \overset{\text{主許容性}}{=} b^\top y^*$
- 弱双対定理の系より，x^* は (P) の最適解，y^* は (D) の最適解 □

相補性定理：書き換え

相補性定理

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P) の最適解 / $y^* \in \mathbb{R}^m$ が (D) の最適解 $\Leftrightarrow$

$Ax^* = b,\ x^* \geq 0$ (主許容性)
$A^\top y^* \leq c$ (双対許容性)
${x^*}^\top (c - A^\top y^*) = 0$ (相補性)

x^*, y^* が主許容性，双対許容性，相補性を満たすとする

- ${x^*}^\top (c - A^\top y^*) = \sum_{i=1}^n x_i^* (c - A^\top y^*)_i$ であり，
  $x_i^* \geq 0,\ (c - A^\top y^*)_i \geq 0$ なので

$$\begin{aligned} x_i^* > 0 &\Rightarrow (A^\top y^*)_i = c_i \\ (A^\top y^*)_i < c_i &\Rightarrow x_i^* = 0 \end{aligned}$$

目次

別の形の線形計画問題とその双対問題

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

線形計画問題：(P')

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(P') の双対問題：(D') これも線形計画問題

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

線形計画法の弱双対定理

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P')

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題：(D')

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

線形計画法の弱双対定理

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P) の許容解
$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D) の許容解 $\Rightarrow b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \leq c^\top x$

線形計画法の弱双対定理：証明

$x \in \mathbb{R}^n$ が (P') の許容解であると仮定すると，
- $A_1 x = b_1$ かつ .... (1)
- $A_2 x \geq b_2$ かつ .... (2)
- $x \geq 0$ .... (3)

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D') の許容解であると仮定すると，
- $A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c$ .... (4)
- $y_2 \geq 0$ .... (5)

したがって，

$$\begin{aligned} b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 &\overset{(1)}{=} (A_1 x)^\top y_1 + b_2^\top y_2 \overset{(2),(5)}{\leq} (A_1 x)^\top y_1 + (A_2 x)^\top y_2 \\ &= x^\top (A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2) \overset{(3),(4)}{\leq} x^\top c = c^\top x \quad \square \end{aligned}$$

線形計画法の弱双対定理：系

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P')

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題：(D')

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

弱双対定理の系

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P') の許容解
$y_1^* \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2^* \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D') の許容解 $\Rightarrow$ x^* は (P') の最適解
$c^\top x^* = b_1^\top y_1^* + b_2^\top y_2^*$ $\quad$ y_1^*, y_2^* は (D') の最適解

線形計画法の強双対定理

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P')

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題：(D')

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

線形計画法の強双対定理

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P') の最適解
$y_1^* \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2^* \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D') の最適解 $\Rightarrow c^\top x^* = b_1^\top y_1^* + b_2^\top y_2^*$

線形計画法の相補性定理

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}, c \in \mathbb{R}^n$ は定数

主問題：(P')

$x \in \mathbb{R}^n$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^\top x \\ \text{subject to} & A_1 x = b_1, \\ & A_2 x \geq b_2, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

双対問題：(D')

$y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ は変数

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & b_1^\top y_1 + b_2^\top y_2 \\ \text{subject to} & A_1^\top y_1 + A_2^\top y_2 \leq c, \\ & y_2 \geq 0 \end{array}$$

相補性定理

$x^* \in \mathbb{R}^n$ が (P') の最適解，$y_1^* \in \mathbb{R}^{m_1}, y_2^* \in \mathbb{R}^{m_2}$ が (D') の最適解

$\Leftrightarrow$
- $A_1 x^* = b_1, A_2 x^* \geq b_2, x^* \geq 0$ (主許容性)
- $A_1^\top y_1^* + A_2^\top y_2^* \leq c, y_2^* \geq 0$ (双対許容性)
- ${x^*}^\top (c - A_1^\top y_1^* - A_2^\top y_2^*) = 0$ (主相補性)
- ${y_2^*}^\top (A_2 x^* - b_2) = 0$ (双対相補性)

目次

今日のまとめ

今日のまとめ

線形計画法における重要概念を復習する
- 線形計画法の双対定理
- 線形計画法の相補性定理

次回の予告

整数計画法における重要概念を復習する
- 緩和

線形計画法，整数計画法に関連する幾何学を復習する
- 凸包
- 凸多面体