離散最適化基礎論　第 5 回
一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2020 年 11 月 10 日

最終更新：2020 年 11 月 8 日　23:52

スケジュール 前半 (予定)

1	マッチングの用語	(10/6)
2	二部グラフの最大マッチング	(10/13)
3	二部グラフの最大マッチング：アルゴリズム	(10/20)
4	一般グラフの最大マッチング	(10/27)
⋆	祝日 のため 休み	(11/3)
5	一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム	(11/10)
6	線形計画法の復習	(11/17)
⋆	調布祭片付け のため 休み	(11/24)
7	整数計画法の復習	(12/1)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8	二部グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法	(12/8)
⋆	国際会議 のため 休み	(12/15)
9	二部グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム	(12/22)
10	一般グラフの最小費用完全マッチング：線形計画法	(1/5)
11	一般グラフの最小費用完全マッチング：完全整数双対性	(1/12)
12	一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (概要)	(1/19)
13	一般グラフの最小費用完全マッチング：アルゴリズム (詳細)	(1/26)
14	予備	(2/2)

注意：予定の変更もありうる

この講義が対象とする 4 つの問題

二部グラフの最大マッチング問題	→	二部グラフの最小費用完全マッチング問題
↓		↓
一般グラフの最大マッチング問題	→	一般グラフの最小費用完全マッチング問題

この講義で行うこと

「これら 4 つの問題は多項式時間で解けること」の説明

重要な考え方

- 最適化における最大最小定理 (強双対性)
- 費用無し問題のアルゴリズム + 線形計画法 ⇝ 費用有り問題のアルゴリズム (主双対法)

目次

1. 復習：前回までの重要概念
2. 一般グラフにおける増加道の探索：アイディア
3. グラフの縮約と花
4. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム
5. 今日のまとめ と 次回の予告

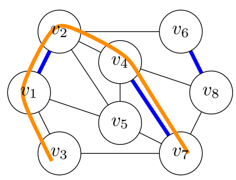
交互道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：交互道 (alternating path)

M に関する交互道とは，G における道で，M の辺と $E - M$ の辺が交互に現れるもの

交互道を交互路と呼ぶこともある



これ は 青のマッチング に関する交互道である

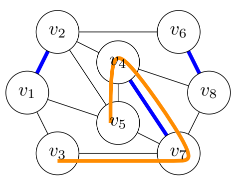
増加道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定義：増加道 (augmenting path)

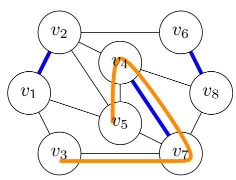
M に関する増加道とは，M に関する交互道で，その両端点が M の辺と接続しないもの

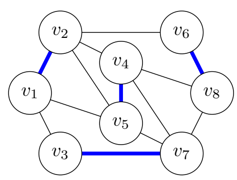
増加道を増大道，増加路，増大路と呼ぶこともある



これ は 青のマッチング に関する増加道である

増加道に沿ってマッチングを大きくする





辺数 3 の マッチング ⇝ 増加道に沿って 大きくする ⇝ 辺数 4 の マッチング

つまり

M に関する増加道が存在する ⇒ M は最大マッチングではない

つまり (対偶を考えると)

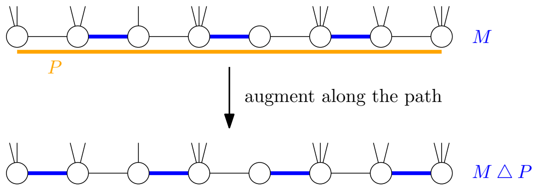
M は最大マッチングである ⇒ M に関する増加道が存在しない

最大マッチングと増加道

無向グラフ $G = (V, E)$，マッチング $M \subseteq E$

定理：最大マッチングと増加道の関係 (Berge '57)

M が G の最大マッチング ⇔ M に関する増加道が存在しない

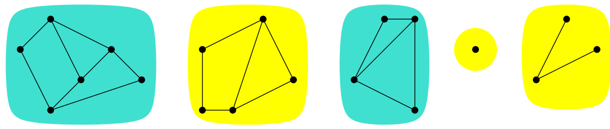


グラフの奇成分

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：奇成分 (odd component)

G の奇成分とは，
G における連結成分で，頂点数が奇数であるもののこと



記法：奇成分の総数

$o(G) = G$ における奇成分の総数

上の例では，$o(G) = 3$

Berge–Tutte の公式

定理：Berge–Tutte の公式

無向グラフ $G = (V, E)$ に対して

$$|\text{最大マッチング}| = \min \frac{1}{2}\{|V| - o(G-U) + |U| \mid U \subseteq V\}$$

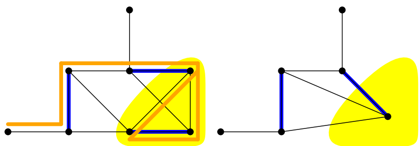
「$\leq$」の証明 (弱双対性) は簡単,「$\geq$」の証明で Tutte の定理を使う

二部グラフ	→	一般グラフ
Hall の結婚定理	→	Tutte の定理
Kőnig–Ore の公式	→	Berge–Tutte の公式
Kőnig–Egerváry の定理	→	???

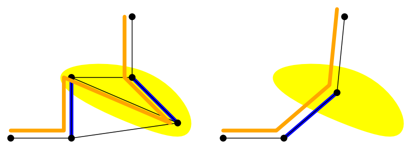
目次

1. 復習：前回までの重要概念
2. 一般グラフにおける増加道の探索：アイディア
3. グラフの縮約と花
4. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム
5. 今日のまとめ と 次回の予告

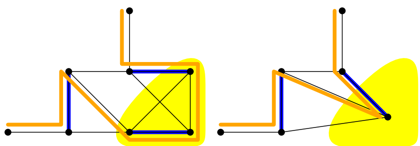
一般グラフにおける増加道の探索 (1)



一般グラフにおける増加道の探索 (2)



一般グラフにおける増加道の探索 (3)



目次

1. 復習：前回までの重要概念
2. 一般グラフにおける増加道の探索：アイディア
3. グラフの縮約と花
4. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム
5. 今日のまとめ と 次回の予告

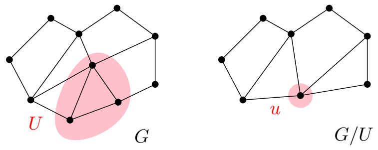
グラフの縮約

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点部分集合 $U \subseteq V$

定義：縮約 (contraction)

G における U の縮約とは，次のグラフ G/U

- G/U の頂点集合 $= V - U \cup \{u\}$ (ただし，$u \notin V$)
- G/U の辺集合 $= (E - \{e \in E \mid U \cap e \neq \emptyset\}) \cup \{\{v, u\} \mid$ ある $x \in U$ に対して $\{v, x\} \in E\}$



「頂点集合 U を頂点 u に縮約する」ということもある

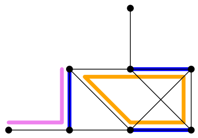
花

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$

定義：花 (blossom)

M に関する花とは，長さ $2k + 1$ の G の閉路 C で，次を満たすもの

- M と k 個の辺を共有する
- C の中で M に飽和されていない頂点と，M に飽和されない頂点を結ぶ偶数長の交互道 (ただし，C の辺を使わない) が存在する



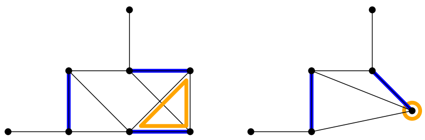
これは花である

花と縮約と最大マッチング (1)

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング M，M に関する花 C

定義：花の縮約

C の縮約 G/C に伴い，M も縮約する (その結果を M/C と書く)



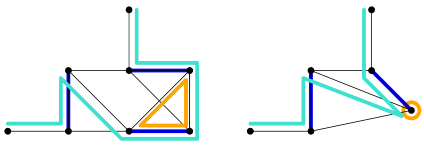
$\boxed{\text{注}}$：M/C は G/C のマッチング

花と縮約と最大マッチング (2)

無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング M，M に関する花 C

性質：花の縮約と最大マッチング

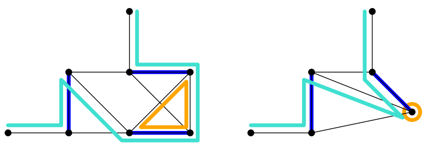
M が G の最大マッチング $\Leftrightarrow$ M/C が G/C の最大マッチング



花と縮約と最大マッチング (2)：証明

証明 ($\Rightarrow$)：M が G の最大マッチングではないとする

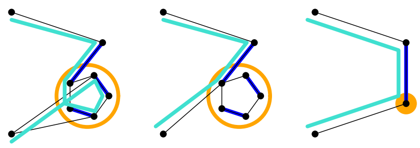
- G には，M に関する増加道 P が存在する
- このとき，P/C は G/C の M/C に関する増加道である (なぜ？)
- すなわち，M/C は G/C の最大マッチングではない □



花と縮約と最大マッチング (2)：証明 (続き)

証明 ($\Leftarrow$)：M/C が G/C の最大マッチングではないとする

- G/C には，M/C に関する増加道 P' が存在する
- このとき，G の M に関する増加道を P' から作れる (なぜ？)
- すなわち，M は G の最大マッチングではない □



目次

1. 復習：前回までの重要概念
2. 一般グラフにおける増加道の探索：アイディア
3. グラフの縮約と花
4. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム
5. 今日のまとめ と 次回の予告

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：基本的な考え方

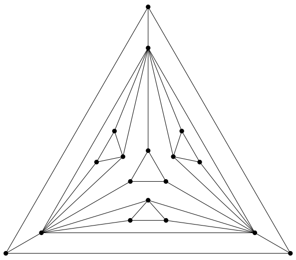
無向グラフ $G = (V, E)$

基本的な考え方

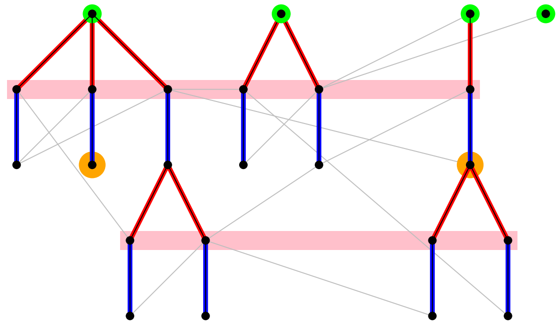
G のマッチング M を常に保持する

- M に関する花 C か増加道 P を見つけようとする
- 花 C が見つかったとき
  - $G := G/C$，$M := M/C$ として，繰り返す
- 増加道 P が見つかったとき
  - 縮約を解除して，もとのグラフの増加道 P' を見つける
  - $M := M \triangle P'$ とする
- 花も増加道も見つからないとき
  - M が G の最大マッチングであるはず
  - Berge–Tutte の公式を用いて，最適性を保証する

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：例



一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム：イメージ



ピンクの頂点数 ＝ 青の辺数

$$\underbrace{|M|}_{\text{青の辺数}} = \frac{1}{2}(\underbrace{|V| - o(G-U)}_{\text{ピンクの頂点数}} + \underbrace{|U|}_{\text{ピンクの頂点数}})$$

一般グラフの最大マッチングを見つけるアルゴリズム

入力：無向グラフ $G = (V, E)$，G のマッチング $M \subseteq E$ (例えば，$M := \emptyset$ とする)

1. $S := M$ が飽和しない G の頂点全体の集合
2. S から G の頂点を幅優先探索する
   - 探索時に，M が飽和する頂点を新たに訪問したら，その頂点はキューに挿入せず，M の辺をたどって到達する頂点を挿入する
3. 増加道 P が見つかったら，縮約を解除し，$M := M \triangle P$ として最初に戻る
4. 花 C が見つかったら，$G := G/C$，$M := M/C$ として最初に戻る
5. 増加道も花も見つからなかったら，縮約を解除し，M を出力して終了

定理 (Edmonds '65)

一般グラフの最大マッチングは多項式時間で発見できる

目次

1. 復習：前回までの重要概念
2. 一般グラフにおける増加道の探索：アイディア
3. グラフの縮約と花
4. 一般グラフの最大マッチング：アルゴリズム
5. 今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ

今日のまとめ

- 一般グラフの最大マッチングのアルゴリズム
- 重要概念 1：花
- 重要概念 2：グラフの縮約

次回の予告

線形計画法の復習

- 最小費用完全マッチング問題を解くための準備